

GUÍA DEL EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA

El examen general de Topología tiene tres opciones a elegir sólo una:

- Topología Algebraica
- Topología Diferencial
- Topología General

A continuación pueden consultar los temarios de cada una de las opciones

Topología Algebraica

1. Grupo fundamental

- 1.1 Propiedades básicas
- 1.2 Teorema de Seifert-Van Kampen

2. Espacios cubrientes

- 2.1 Ejemplos ($R \rightarrow S^1$ y $X \rightarrow X/G$)
- 2.2 Teoremas del levantamiento y de existencia de espacios cubrientes
- 2.3 Cálculo del grupo fundamental de S^1 y de RP^n
- 2.4 Aplicaciones
 - 2.4.1 Teoremas del punto fijo de Brouwer en dimensión 2 y de Borsuk-Ulam para S^2

3. Espacios de lazos y grupos de homotopía $\pi_n(X, x_0)$ si n es mayor o igual a 2. Definiciones y conmutatividad para estos grupos

4. Homología singular

- 4.1 Invariancia homotópica
- 4.2 Relación entre $\pi_1(X, x_0)$ y $H_1(X)$

5. Sucesión exacta de homología

- 5.1 Teorema de escisión
- 5.2 Sucesión de Mayer-Vietoris

6. La homología de S^n

- 6.1 Aplicaciones
 - 6.1.1 Teoremas de campos vectoriales sobre S^n
 - 6.1.2 Teorema de separación de Jordan-Brouwer
 - 6.1.3 Teorema de invariancia del dominio
 - 6.1.4 Teorema fundamental del álgebra
 - 6.1.5 Teorema de punto fijo de Brouwer

7. Complejos esféricos y celulares (CW-complejos)

- 7.1 Cálculo de la homología de RP^n , CP^n y superficies cerradas
- 7.2 Números de Betti
- 7.3 Característica de Euler-Poincaré

Bibliografía Recomendada.

- Aguilar, M. A, S. Gitler y C. Prieto. *Topología algebraica: un enfoque homotópico*, México, McGraw-Hill-UNAM, 1998
- Greenberg, M and J. Harper. *Algebraic Topology, a first course*, Addison Wesley, 1981
- Massey, W. *A basic course in algebraic topology*, Springer Verlag, 1991
- Spanier, E. *Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1981

NOTA: El propósito de este curso es el de dar un panorama del material básico de la Topología Algebraica que es útil en otras ramas de las matemáticas. Ya que el contenido del curso es sumamente extenso, no es posible tratar todos los temas con igual profundidad. Algunos resultados tendrán que ser vistos sin demostración. El tema de Cohomología Singular es muy importante y si el tiempo lo permite, podría tratarse en el curso.

Topología Diferencial

1. Variedades topológicas y diferenciables

- 1.1 Definiciones básicas. Concepto de estructura diferencial. Estructuras no difeomorfas en S^7 (opcional)
- 1.2 Subvariedades. Productos de variedades
- 1.3 Variedades con frontera
- 1.4 Funciones diferenciables

2. El haz tangente

- 2.1 Espacio tangente de una variedad en un punto (diferentes versiones).
La derivada de una función en un punto
- 2.2 Definición de haz vectorial y prehaz vectorial
- 2.3 El haz tangente. La derivada de una función. Functores suaves. Nuevos haces vectoriales y fibrados: dual, tensor, cuña

3. Transversalidad

- 3.1 Valores regulares
- 3.2 Transversalidad
- 3.3 Teoremas de Sard y Thom

4. Formas normales

- 4.1 Teoremas de inmersión, sumersión, función inversa, rango y rango constante
- 4.2 Variedades encajadas

5. Teoremas de Whitney

- 5.1 Particiones de la unidad. Funciones propias
- 5.2 Teoremas de inmersión, inmersión inyector y encaje de Whitney (Topología WO)

6. Homotopía y estabilidad

- 6.1 Estabilidad de inmersiones, sumersiones, encajes, difeomorfismos y transversalidad
- 6.2 Funciones de Morse

7. Teoremas de vecindad tubular y collar

8. Grado

- 8.1 El grado módulo 2. Teoremas de Jordan-Brouwer y Borsuk-Ulam
- 8.2 Orientación en variedades. El grado en general. Teorema de Lefschetz
- 8.3 Característica de Euler y teorema de Poincaré-Hopf
- 8.4 Caracterización de la homotopía por el grado. Teorema de Ho

Bibliografía recomendada

- Bröeeker, T and K. Jänich. *Introduction to differential topology*, Cambridge University Press, 1982
- Guillemin, V. and A. Pollack. *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974
- Spivak, M. *A comprehensive introduction to differential geometry*, Publish or Perish, Inc, 1979

Topología General

1. Conceptos básicos

- 1.1 Topologías, bases, sub-bases y vecindades
- 1.2 Topología generada por una métrica
- 1.3 Axiomas de numerabilidad
- 1.4 Operadores topológicos
- 1.5 Densidad
- 1.6 Subespacios topológicos

2. Continuidad y convergencia

- 2.1 Propiedades equivalentes a la continuidad de las funciones
- 2.2 Diversos tipos de funciones (abiertas, cerradas, homeomorfismos, encajes y retracciones)
- 2.3 Topologías inducidas por familias de funciones
- 2.4 Convergencia de redes y filtros
- 2.5 Caracterización de la continuidad de funciones mediante convergencia

3. Productos y cocientes

- 3.1 Producto topológico y su propiedad universal
- 3.2 Funciones producto
- 3.3 Topología cociente y diversas formas de obtener un espacio cociente
- 3.4 Teorema de transgresión
- 3.5 Topología suma (coherente) y suma directa de espacios topológico

4. Axiomas de separación

- 4.1 Espacios T_{-1} de Hausdorff, regulares y completamente regulares
- 4.2 Espacios normales
- 4.3 Teorema de Urysohn
- 4.4 Teorema de extensión de Tietze

5. Compacidad

- 5.1 Caracterizaciones de la compacidad con redes y filtros
- 5.2 Teorema de Tychonoff
- 5.3 Compacidad y axiomas de separación
- 5.4 Compacidad local
- 5.5 Compactación por un punto y compactación de Stone-Cech

6 Paracompacidad y metrizableidad

- 6.1 Espacios paracompactos y axiomas de separación
- 6.2 Particiones de la unidad
- 6.3 Espacios metrizable
- 6.4 Teorema de Stone
- 6.5 Teorema de metrización de Urysohn
- 6.6 Teorema de metrización de Nagata-Smirnov-Bing

7. Conexidad y homotopía

- 7.1 Conexidad y conexidad por trayectorias
- 7.2 Conexidad local y local por trayectorias
- 7.3 Relación de homotopía
- 7.4 Espacios homotópicamente equivalentes y propiedades homotópicas
- 7.5 Espacios contráctiles y retracto (fuerte) por deformación

Tema opcional a elegir:

8. Más sobre conexidad

- 8.1 Teoremas de separación en espacios de Hausdorff
- 8.2 Casos en que las quasi componentes son conexas
- 8.3 ω -conexidad y el teorema de Sierpinski
- 8.4 El discontinuo de Cantor; propiedades y caracterización
- 8.5 Espacios métricos con la propiedad S
- 8.6 Caracterizaciones del arco y de la curva cerrada simple

9. Uniformidades

- 9.1 Definición de uniformidad por conectores y por cubiertas, relación entre ellas
- 9.2 Ejemplos fundamentales de espacios uniformes
- 9.3 Uniformización de espacios topológicos
- 9.4 Filtros de Cauchy y completez
- 9.5 Extensión de funciones uniformemente continuas
- 9.6 Completación de espacios uniformes
- 9.7 Compactación y espacios totalmente acotados

10. Grupos y espacios vectoriales topológicos

- 10.1 Breve introducción a los grupos topológicos
- 10.2 Espacios vectoriales topológicos
- 10.3 Convexidad local
- 10.4 Espacios vectoriales normados

11. Construcciones especiales de espacios

- 11.1 Cono y suspensión de espacios
- 11.2 Espacios de adjunción
- 11.3 Cilindro y cono de una transformación
- 11.4 CW-Complejos

12. Espacios de funciones

- 12.1 Topología de la convergencia puntual y topología compacto-abierta en $C(X, Y)$
- 12.2 Topologías admisibles
- 12.3 Ley exponencial
- 12.4 Topología de la convergencia uniforme
- 12.5 Equicontinuidad, aproximaciones uniformes y puntuales en $C(X, Y)$
- 12.6 Teorema de Stone-Weierstrass y Arzela-Ascoli

Bibliografía recomendada

- Engelking, R. *General Topology*, Berlin, Heldermann Verlag, 1989
- García-Maynez, A. y Tamariz, A. *Topología General*, México, Porrúa, 1988.
- Nagata, J. *Modern General topology*, Amsterdam, North-Holland, 1985.