

GUÍA DEL EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD

El examen general de probabilidad se basará en el material especificado en el programa de los dos cursos básicos del área: Probabilidad I y Procesos Estocásticos. Dicho examen consta de los dos últimos temas del programa de Probabilidad I y del material indicado de los dos primeros temas del programa de Procesos Estocásticos I.

Los temas son:

1. Esperanza y momentos de variables aleatorias, Probabilidad y esperanza condicional.
2. Leyes de los grandes números y el Teorema del límite central.
3. Procesos Puntuales.
4. Cadenas de Markov.

El énfasis del examen será en el uso adecuado de los resultados básicos de los temas de los programas. La bibliografía sugerida en los programas es adecuada, y se hará más específica así como la fecha de aplicación del examen, después de la próxima reunión del área que se llevará a cabo el 4 de junio del presente. Se sugiere también el estudio de los ejercicios asignados como tarea en los cursos básicos impartidos a lo largo del último año.

A continuación pueden consultar los temarios de los cursos básicos de Probabilidad I y Procesos Estocásticos.

Probabilidad I

Posgrado de Matemáticas, UNAM
27 de mayo de 2002

***1. Espacios de Probabilidad, variables aleatorias y distribuciones. 4 semanas.**

- 1.1 Espacios y funciones medibles.
 - 1.1.1 Definiciones básicas y ejemplos.
 - 1.1.2 Lemas de clases monótonas.

- 1.2 Espacios de medida y de probabilidad.
 - 1.2.1 Definiciones básicas y ejemplos.
 - 1.2.2 Distribuciones o leyes de probabilidad.
 - 1.2.3 Funciones de distribución.
 - 1.2.4 Construcción del espacio de probabilidad asociado a una función de distribución. (Opcional).
- 1.3 Espacios y medidas producto, e independencia.

2. Esperanza y momentos de variables aleatorias, probabilidad y esperanza condicional.

- 2.1 Integral de Lebesgue, esperanzas de funciones de variables aleatorias, momentos y Teorema de cambio de variable.
- 2.2 Probabilidad y Esperanza Condicional.
 - 2.2.1 Esperanza Condicional y sus propiedades elementales.
 - 2.2.2 Probabilidad Condicional.
 - 2.2.3 Distribuciones Condicionales.

3. Leyes de los grandes números y el Teorema del límite central.

- 3.1 Tipos de convergencia.
 - 3.1.1 Casi segura, en probabilidad, en L_p .
 - 3.1.2 Débil, o en distribución.
- 3.2 Lema de Borel-Cantelli.
- 3.3 Leyes de los grandes números.
 - 3.3.1 Ley débil de los grandes números.
 - 3.3.2 Ley fuerte de los grandes números, con cuarto momento finito.
- 3.4 El Teorema del límite central.
 - 3.4.1 Función Característica y Teorema de Continuidad de Lévy (sin demostración).
 - 3.4.2 Teorema del límite central para variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas en L_2 .
- *3.5 Ley del logaritmo iterado, sin demostración.

Nota

Los temas indicados con un asterisco no se incluirán en el Examen General.

Bibliografía

Ash, R. B. (1972) *Real Analysis and Probability*. Academic Press, New York.

Billingsley, P. (1979) *Probability and Measure*. J. Wiley and sons, New York.

Borkar, V. S. (1995) *Probability Theory, an advanced course*. Universitext, Springer, New York.

- Breiman, L. (1971) *Probability*. J. Wiley and sons, New York.
- Chow, Y. S. y Teicher, H. (1988) *Probability Theory*. J. Wiley and sons, Chichester.
- Clarke, L. E. (1975) *Random variables*. Longman, London.
- Dudley, R. M. (1989) *Real Analysis and Probability*. Wadsworth&Brooks/Cole, Pacific Grove.
- Durrett, R. (1991) *Probability: Theory and examples*. Statistics/Probability Series, Wadsworth&Brooks/Cole, Pacific Grove.
- Feller, W. (1968-1971) *An Introduction to Probability Theory and Applications*. Vols. I y II, J. Wiley and sons, New York.
- Friested, y Gray. (1971) *Probability*. J. Wiley and sons, New York.
- Laha, R. G. y Rohatgi, V. K. (1979) *Probability Theory*. J. Wiley and sons, New York.

Procesos Estocásticos

Martingalas a tiempo discreto

- 1.1 Martingalas, submartingalas y supermartingalas, definiciones propiedades y ejemplos
- 1.2 Tiempos de paro, teorema de muestreo opcional de Doob, aplicaciones
- 1.3 Desigualdades fundamentales
- 1.4 Teorema de saltos de Doob y convergencia
- 1.5 Integrabilidad Uniforme (★)

Cadenas de Markov a tiempo continuo y con espacio de estados discreto

- 2.1 Repaso de Cadenas de Markov a tiempo discreto
- 2.2 Cadenas de Markov a tiempo continuo, definiciones y ejemplos
- 2.3 Probabilidades de transición
- 2.4 Generador infinitesimal
- 2.5 Tiempos de paro y propiedad fuerte de Markov
- 2.7 Clasificación de estados y distribuciones estacionarias
- 2.8 Ecuaciones de Kolmogorov(Backward y Forward)

Procesos de Poisson

- 3.1 Procesos de conteo, definición y propiedades
- 3.2 Procesos de Poisson
 - 3.2.1 Proceso de Poisson compuesto
 - 3.2.2 Proceso de Poisson no-homogéneo
 - 3.2.3 Propiedad de Markov del proceso de Poisson
 - 3.2.4 Martingalas asociadas a los procesos de Poisson y Poisson compuesto
- 3.3 Procesos de renovación, definición y propiedades
 - 3.3.1 Ecuación de renovación
 - 3.3.2 Proceso de renovación como un proceso de conteo
 - 3.3.3 Proceso de Poisson como un proceso de renovación

Procesos Gaussianos

- 4.1 Definiciones y ejemplos
- 4.2 Propiedades de la distribución Normal multivariada
- 4.3 Procesos en L^2 y funciones de covarianza

- 4.4 Continuidad y diferenciabilidad de trayectorias
- 4.5 Ejemplos
- 4.6 Movimiento Browniano

El carácter (*) significa que el tema es opcional y por ende no se considera material del examen general.

Bibliografía:

- LAHA, R.G. Y ROHATGI, V.K.(1979) PROBABILITY THEORY. WILEY.
- WILLIAMS, D. (1991) PROBABILITY WITH MARTINGALES. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
- HOEL, P.G., PORT, S.C. Y STONE, C.I. (1987) INTRODUCTION TO STOCHASTIC PROCESSES WAVELAND PRESS
- LAWLER, G.(1995) INTRODUCTION TO STOCHASTIC PROCESSES. CHAPMAN AND HALL/CRC
- KARLIN, S. Y TAYLOR, H.(1981) A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES. ACADEMIC PRESS
- KARLIN, S. Y TAYLOR, H. (1981) A SECOND COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES. ACADEMIC PRESS.
- BREMAUD, P.(1998) MARKOV CHAINS. SPRINGER VERLAG
- RESNICK, S.I.(2005) ADVENTURES IN STOCHASTIC PROCESSES. BIRKHOUSER BOSTON
- NORRIS, J.R.(1998) MARKOV CHAINS. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- KARLIN, S. Y TAYLOR, H.(1981) A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES. ACADEMIC PRESS.
- ABRAHAMSEN, P(1997) A REVIEW OF GAUSSIAN RANDOM FIELDS AND CORRELATION FUNCTIONS. TECHNICAL REPORT 917, NORWEGIAN COMPUTING CENTER, OSLO. SE ENCUENTRA EN SITIO WEB:
- [HTTP://WWW.MATH.NTNU.NO/OMRE/TMA4250/V2007/ABRAHAMSEN2.PS](http://WWW.MATH.NTNU.NO/OMRE/TMA4250/V2007/ABRAHAMSEN2.PS)
- HIDA, T. Y HITSUDA, M.(1993) GAUSSIAN PROCESSES. AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
- MARCUS, M.B. Y ROSEN, J.(2006) MARKOV PROCESSES, GAUSSIAN PROCESSES, AND LOCAL TIMES. CAMBRIDGE STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS.
- ASH, R.B.,(2000) PROBABILITY AND MEASURE THEORY, ACADEMIC PRESS.
- HERNÁNDEZ-CASTAÑOS D.B. (1981) CAMINATAS ALEATORIAS Y MOVIMIENTO BROWNIANO. MONOGRAFÍAS DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, N 9, UNAM

Bibliografía complementaria:

- ASH, R.B. Y GARDNER, M.F.(1975) TOPICS IN STOCHASTIC PROCESSES, ACADEMIC PRESS.
- BOGACHEV, V.(1998) GAUSSIAN MEASURES. MATHEMATICAL SURVEYS AND MONOGRAPHS, N 62, AMS
- LAMPERTI, J.W.(1977) STOCHASTIC PROCESSES: A SURVEY OF THE MATHEMATICAL THEORY, SPRINGER-VERLAG
- ROSS, S.M. (2007) INTRODUCTION TO PROBABILITY MODELS. NINTH EDITION, ACADEMIC PRESS