POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
EXAMEN: GENERAL DE CONOCIMIENTOS
MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL
FECHA: 20 DE ENERO DE 2016

NOMBRE COMPLETO:

§1. Instrucciones

El examen consiste de 8 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 36. Para aprobar el examen se debe obtener al menos 22 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 10:00 A. M. a 3:00 P. M.).

§2. Definiciones y notaciones

Sea X un espacio topológico. El símbolo τ_X representará a la topología de X. Dado $A \subseteq X$, denotaremos por $\operatorname{cl}_X A$, $\operatorname{Int}_X A$ y $\operatorname{Fr}_X A$ (o por $\overline{A}$, $\operatorname{Int} A$ y $\operatorname{Fr} A$ si no hay riesgo de confusión) a la cerradura, al interior y a la frontera de A en X, respectivamente. Diremos que X es

1. *regular* si para cada $U \in \tau_X$ y cualquier $z \in U$ existe $V \in \tau_X$ con $z \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$;
2. *completamente regular* si cada vez que F es un cerrado en X y $z \in X \setminus F$, existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(z) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$;
3. *normal* si cualesquiera dos cerrados ajenos de X pueden ser separados mediante abiertos ajenos de X.

De este modo, *ser* T_3 (respectivamente, $T_{3\frac{1}{2}}$ ó T_4) significa ser regular y de Hausdorff (respectivamente, completamente regular y de Hausdorff ó normal y de Hausdorff).

Una función $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos será llamada *abierta* (respectivamente, *cerrada*) si $f(A)$ es abierto (respectivamente, cerrado) en Y siempre que A es abierto (respectivamente, cerrado) en X.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, denotaremos por $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ al producto cartesiano de dicha familia. Además, a menos que se indique lo contrario, dicho producto estará equipado con la topología producto.

El conjunto de números naturales será representado por $\mathbb{N}$.

§3. Preguntas

1 (10 puntos). Determine cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos y cuáles son falsos. En cada caso argumente su respuesta mediante una demostración o un ejemplo.

1. Si $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos regulares, entonces el espacio que resulta de equipar al producto cartesiano $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ con la topología que tiene por base a la colección $\left\{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha : \forall\alpha \in A\ (U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}\right\}$ también es regular.
2. Si A y B son subconjuntos del espacio X tales que $\operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{Fr}(B) = \emptyset$, entonces
$$\operatorname{Fr}(A \cup B) = \left(\overline{A} \cap \operatorname{Fr} A\right) \cup \left(\overline{B} \cap \operatorname{Fr} B\right).$$
3. Si D y U son, respectivamente, un denso y un abierto en el espacio X, entonces $\overline{D \cap U} = \overline{U}$.
4. Una función $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos es continua si y sólo si para cada $B \subseteq Y$ sucede que $\operatorname{Fr}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\operatorname{Fr}(B))$.

2 (2 puntos). Pruebe, usando argumentos sobre conexidad, que los espacios euclideanos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Valor	10	2	4	6	3	3	4	4	36
Tu puntaje									

.

3 (4 puntos). Demuestre que si $\mathbb{S}$ es la recta de Sorgenfrey, entonces $\mathbb{S}$ es $T_{3\frac{1}{2}}$, no es segundo numerable y no es metrizable.

4 (6 puntos). Suponga que X es un espacio de Hausdorff y que $\infty \notin X$. Denote por $\mathscr{K}(X)$ a la colección de todos los subconjuntos compactos de X y defina $X_\infty := X \cup \{\infty\}$.

1. Muestre que
$$\sigma := \tau_X \cup \{U \subseteq X_\infty : \infty \in U \text{ y } X_\infty \setminus U \in \mathscr{K}(X)\}$$
es una topología para X_∞. Para el resto de este problema X_∞ estará equipado con σ.
2. Denote por $\mathbb{Q}$ al subespacio de la recta real formado por todos los números racionales y pruebe que $\operatorname{Int}_{\mathbb{Q}} K = \emptyset$ para cada $K \in \mathscr{K}(\mathbb{Q})$.
3. Use el inciso anterior para probar que $\mathbb{Q}_\infty$ no es un espacio de Hausdorff.

5 (3 puntos). Si X es un espacio de Hausdorff regular infinito, entonces existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, una familia de abiertos no vacíos en X, tal que $U_m \cap U_n = \emptyset$, siempre que $m \neq n$.

6 (3 puntos). Suponga que para cada $\alpha \in A$ se tiene que $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y_\alpha$ es una función continua, abierta y suprayectiva. Pruebe que la función $h \colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ dada por
$$h\left((x_\alpha)_{\alpha \in A}\right) = \left(f_\alpha(x_\alpha)\right)_{\alpha \in A}$$
es una función cociente.

7 (4 puntos). Sea E una relación de equivalencia en el espacio topológico X y denote por $\pi \colon X \to X/E$ a la función que a cada punto de X le asocia su clase de equivalencia módulo E. Pruebe que si X es T_3 y π es una función cerrada, entonces $A := \{(x, y) \in X \times X : x \, E \, y\}$ es un subconjunto cerrado del producto topológico $X \times X$ (*sugerencia*: comience por probar que todos los elementos de X/E son subconjuntos cerrados de X).

8 (4 puntos). Suponga que X es un espacio topológico y demuestre los enunciados siguientes.

1. X es normal si y sólo si para cualesquiera $U, V \in \tau_X$ con $U \cup V = X$ existen cerrados F y G en X tales que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ y $F \cup G = X$.
2. Si X es T_4 y $f \colon X \to Y$ es continua, cerrada y suprayectiva, entonces Y es T_4.