EXAMEN: GENERAL
FECHA: 23 DE ENERO DE 2015

MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL

NOMBRE COMPLETO:

INSTRUCCIONES. El examen posee 8 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 15. Para aprobar el examen se deben obtener al menos 11 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 10:00 am a 3:00 pm).

DEFINICIONES Y NOTACIONES. Para un espacio topológico X y un subconjunto A de X, los símbolos $\mathrm{Cl}_X(A)$, $\mathrm{Int}_X(A)$ y $\mathrm{Bd}_X(A)$ denotan la cerradura, el interior y la frontera de A en X, respectivamente.

Un espacio topológico X es $T_{3\,1/2}$ si X es T_1 y, para cada $p \in X$ y todo cerrado C en X con $p \notin C$, existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(p) = 0$ y $f(C) \subset \{1\}$.

Supongamos que X es un espacio topológico y que (Y, d) es un espacio métrico. Sea $\mathcal{B}(X,Y) = \{f\colon X \to Y | f(X) \text{ es un subconjunto acotado de } Y\}$. Podemos definir una métrica φ en $\mathcal{B}(X,Y)$ como sigue: si $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces

$$\varphi(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x))\colon x \in X\}.$$

A φ se le llama la *métrica del supremo*.

Sean $\{X_s\colon s \in S\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. La *topología de la caja* en X es la que tiene por base a todos los conjuntos de la forma $\prod_{s\in S} U_s$ donde, para cada $s \in S$, el conjunto U_s es abierto en X_s.

Dados un espacio topológico X y $A \subset X$, el símbolo X/A se usará para representar al espacio cociente $\{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{A\}$.

PREGUNTAS

1 (1 punto). Sea $f\colon X \to Y$ una función entre los espacios topológicos X y Y. Determina cuáles de los enunciados siguientes son ciertos y cuáles son falsos. En cada caso, justifica tu respuesta.

1. f es continua si y sólo si $f(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset \mathrm{Cl}_Y(f(A))$, para cada $A \subset X$.
2. f es continua si y sólo si $f(\mathrm{Cl}_X(A \cup B)) = \mathrm{Cl}_Y(f(A)) \cup \mathrm{Cl}_Y(f(B))$, para cualesquiera $A, B \subset X$.

2 (1 punto). Sea $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | \{a,b\} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset\}$. Determina si los subespacios A y $\mathbb{R}^2 - A$ son conexos, donde $\mathbb{R}^2$ está equipado con la topología usual.

3 (2 puntos). En este ejercicio $\mathbb{R}$ está equipado con la topología usual. Determina si los espacios cocientes $\mathbb{R}/(0,1)$ y $\mathbb{R}/[0,1]$ son homeomorfos.

4 (2 puntos). Sea X un espacio compacto y T_2. Para cada $p \in X$ definimos

$$Q_p = \bigcap\{A \subset X\colon A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in A\}.$$

Prueba que Q_p es conexo, para cada $p \in X$.

5 (2 puntos). Supongamos que X es un espacio $T_{3^1/_2}$ y que $K, F \subset X$ son tales que K es compacto, F es cerrado en X y $K \cap F = \emptyset$. Prueba que existe una función continua $g\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $g(F) \subset \{0\}$ y $g(K) \subset \{1\}$.

6 (2 puntos). Consideremos el conjunto $[0,1]^2$ con el orden $\prec$ definido como sigue: si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in [0,1]^2$, entonces $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$ si $a_1 < a_2$ o bien si $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2$.

El *cuadrado lexicográfico* es el conjunto $[0,1]^2$ con la topología del orden inducida por el orden $\prec$.

Determina si el cuadrado lexicográfico es primero numerable, si es separable y si tiene un subconjunto discreto cuya cardinalidad es la de los números reales.

7 (3 puntos). Para cada $s \in [2,3]$, sea $X_s = [0,1]$. Consideremos ahora el producto cartesiano $X = \prod_{s\in[2,3]} X_s$. Notemos que a X le podemos dar tres topologías, a saber, la topología de la caja τ_c, la topología producto τ_p y la topología τ_φ inducida por la métrica del supremo φ en $\mathcal{B}([2,3],[0,1])$. Determina las contenciones que se dan entre las topologías τ_c, τ_p y τ_φ.

8 (2 puntos). Sea $\{X_s\colon s \in S\}$ una familia de espacios topológicos. Hagamos $X = \prod_{s\in S} X_s$ y consideremos que X posee la topología de la caja. Para cada $s \in S$, sea $A_s \subset X_s$. Determina si las siguientes afirmaciones son ciertas:

$$\operatorname{Cl}_X\left(\prod_{s\in S} A_s\right) = \prod_{s\in S} \operatorname{Cl}_{X_s}(A_s)\,,$$

$$\operatorname{Bd}_X\left(\prod_{s\in S} A_s\right) = \prod_{s\in S} \operatorname{Bd}_{X_s}(A_s)\,,$$

$$\operatorname{Int}_X\left(\prod_{s\in S} A_s\right) = \prod_{s\in S} \operatorname{Int}_{X_s}(A_s)\,.$$

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Valor	1	1	2	2	2	2	3	2	15
Tu puntaje									