Examen General de Topología Diferencial 2016-II

Fecha: primero de julio de 2016.
Hora: de 9:00 a 13:00 horas.

Lugar de aplicación: Faculta de Ciencias, Departamento de Matemáticas, salón S102

Todas las variedades y funciones son suaves $\mathbb{C}^\infty$.
Se deben hacer 7 problemas. Los problemas marcados con asterisco (*) son obligatorios.

1 Dado una atlas $A = \{(U_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ de una variedad M. Demuestre que existe un refinamiento localmente finito numerable.

*2 (a) Dé un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a $S^{n-1} \times (0, \infty)$.

(b) Dar un encaje de $S^{n_1} \times S^{n_2}$ a $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$.

3 (a) Demuestre que como haces vectoriales TS^1 es isomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que el inciso anterior es falso para S^2.

*4 (a) Sean M y N variedades conexas sin fronteras. Demuestre que $M \times N$ es orientable si y sólo si M y N son orientables.

*5 Considere $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z, w) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2, y^2 + 4z^2 + 5w^2)$.

(a) Demuestre que $(1, 1)$ es un valor regular.

(b) Calcule $T_{(1,0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})} f^{-1}(1, 1)$.

*6 Sea $f : M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ diferenciable tal que $0 \notin f(M)$. Demuestre que existe L una linea en $\mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $f(M) \cap L$ es un conjunto finito de puntos.

*7 Sea X un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ el cual es acotado. Demuestre que X es globalmente integrable (cada solución maximal tiene a $\mathbb{R}$ como dominio)

8 Sea X compacta sin frontera subavariedad de codimesión k en M^n tal que su haz normal es trivial. Demuestre que existe $f : M \to S^k$ diferenciable con $v_0 \in S^k$ valor regular y $f^{-1}(v_0) = X$.

*9 Demuestre que existe z un numero complejo con $|z| < 1$ y $z^2 = e^{-|z|^2}$.

10 Demueste que $f : S^1 \to S^1$ diferenciable se extiende diferenciablemente al disco cerrado $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ si y sólo si $gra(f) = 0$.