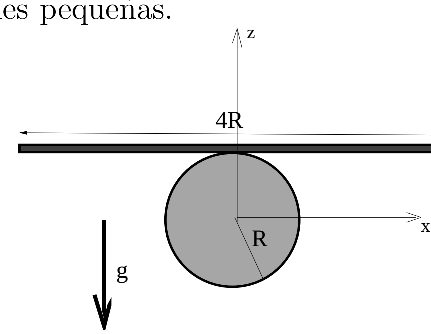
Examen General de Medios Continuos

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los probemas que esta resolviendo.

1. El eje de un cilindro de radio R esta colocado sobre el eje y y no rota sobre su eje. Una barra de longitud $4R$ y ancho y alto ϵ esta colocada sobre el cilindro tal como se ve en la figura a lo largo del eje x. La barra rueda sin resbalar sobre el cilindro y se encuentra en una posición en equilibrio debido a la atracción de la gravedad que va en dirección $-z$.

   a) Considere que el ancho de la barra es insignificante respecto a su largo. Determine la frecuencia de oscilación para el caso de oscilaciones pequeñas.



   b) Estime el máximo valor que puede tener ϵ para que la posición de la barra se vuelva inestable.

2. Sea el sistema

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \text{con} \quad H = A \ln |z-1| + \ln |z+1|, \qquad (1)$$

   $z = x + iy \in \mathbf{C}$, y A constante. El sistema modela el movimiento de una partícula, e.g. una pequeña gota, en el campo de velocidades de dos vórtices centrados en los puntos $z = 1, -1$ del plano.

   a) Haga un dibujo del plano fase para los sistemas Hamiltonianos que corresponden a $H = A \ln |z-1|$, y $H = \ln |z+1|$. ¿ Cuál es el significado de A para el campo vectorial ?

b) Encuentre los puntos fijos para diferentes $A \in \mathbf{R}$. Muestre que están en el eje $y = 0$.

c) Sea $A = 1$. Muestre que el punto fijo (el origen según lo anterior), es linealmente inestable. Haga un dibujo cualitativo del espacio fase cerca del origen.

d) Considere también el sistema de (1) con $A = 1 - \epsilon$, para $\epsilon > 0$. Para ϵ suficiente pequeño se puede suponer que el espacio fase en la vecindad del punto fijo correspondiente as la del inciso anterior. Sea el sistema no-autonomo con $A = A(t)$, donde $A(t)$ es una función $T-$periódica, constante en tramos, con $A = 1$, si $t \in [0, \tau)$, y $A = 1+\epsilon$, si $t \in [\tau, T)$. Argumente que se puede escoger T, $\tau > 0$ para que este sistema tenga una una órbita que permanece en la vecindad del origen para todo tiempo.

3. Una partícula de masa m está restringida a moverse sobre el paraboloide de revolución $z = \alpha(x^2 + y^2)$ donde $\alpha > 0$ (cuyo eje es vertical), bajo la influencia de la gravedad y sin fricción.

   a) Encontrar el problema con un grado de libertad que describe el movimiento.

   b) Qué condiciones debe satisfacer la velocidad inicial de la partícula para que el movimiento sea circular ?

   c) Encontrar el periodo de oscilaciones pequeñas alrededor del movimiento circular encontrado en el inciso (b).

4. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven en el plano bajo las siguientes condiciones : La partícula m_1 está restringida a moverse en el eje de las x y la partícula m_2 al eje de las y. Las partículas se mueven bajo la influencia del potencial

$$U = \frac{-k}{d(m_1, m_2)}$$

   donde $k > 0$ es una constante y $d(m_1, m_2)$ es la distancia euclidiana entre m_1 y m_2.

   a) Dar el espacio de configuraciones del sistema y el número de grados de libertad.

b) Escribir el Lagrangiano del problema.

c) En el caso en que $m_1 = m_2 = 1$, ¿Bajo qué condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, el movimiento de las partículas es acotado ?

d) En el caso en que $m_1 = m_2 = 1$, ¿Bajo qué condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, las partículas colisionan ?