EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2016-II
VIERNES 24 DE JUNIO DEL 2016

Duración: 6 horas
Instrucciones:

(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
(4) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias tales que

$$X_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{con probabilidad } 1/n^2 \\ -1 & \text{con probabilidad } 1 - 1/n^2 \end{cases}.$$

Muestre que $\mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)/n) = 0$ pero que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to -1$$

con probabilidad 1.

Problema 2.

(1) Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y sea $t > 0$. Demostrar la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev, i.e.,

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(X^2)}{t^2}.$$

(2) Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias con $E(X_n) = 0$ y $E(X_n^2) = 1$ para toda $n \geq 1$, y con $E(X_i X_j) = 0$ para $1 \leq i < j < \infty$. Demostrar usando (1) que la ley débil de los grandes números se cumple.

Problema 3. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathscr{F}$ eventos. Demostrar la desigualdad de Bonferroni, i.e.,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

Problema 4. Sea Y una variable aleatoria Poisson de parámetro $x \geq 0$. Suponga que el vector aleatorio (X, Y) es tal que la ley condicional de X dado $Y = k$ admite la densidad densidad $x^{\nu+k} e^{-x}/\Gamma(\nu + k + 1)$ en $(0, \infty)$.

(1) Calcule la transformada de Laplace (o la función característica) de la variable X.
(2) Pruebe que la variable X es infinitamente divisible, es decir, que para toda $n \geq 1$, $X \stackrel{d}{=} X_1 + \cdots + X_n$ donde $X_1, \ldots, X_n$ son variables independientes e idénticamente distribuidas.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Enuncie y demuestre una versión del teorema de muestreo opcional de Doob.

Problema 6. Sea N un proceso de Poisson de parámetro λ y $(\mathscr{F}_t, t \geq 0)$ su filtración canónica.

(1) Si $M_t^q = e^{-qN_t + \lambda t(1-e^{-q})}$, verifique que M^q es una $\mathscr{F}_t$-martingala.
(2) Explique por qué el proceso $M^{n,q}$ dado por

$$M_t^{n,q} = \frac{\partial^n M_t^q}{\partial q^n}$$

es una $\mathscr{F}_t$-martingala para toda $n \in \mathbb{N}$ y calcule $M_t^{1,0}$ y $M_t^{2,0}$.

Problema 7. Considere a X una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados

$$\mathbb{Z}_+^N = \{(z_1, ..., z_N) : z_i \in \mathbb{Z}_+\},$$

cuya matriz de intensidad $\{q(x,y)\}$ satisface que $q(x,y) > 0$ cuando $x - y \in \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2\}$ y vale 0 en otro caso. Probar que son equivalentes:

(1) Existe un vector de distribución $\{\pi(x)\}$ tal que

$$\pi(x)q(x,y) = \pi(y)q(y,x), \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}_+^N.$$

(2) Para cada trayectoria finita $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}_+^N$, tal que x_i comunica con x_{i+1} para toda i, la cantidad

$$\frac{\prod_{i=1}^n q(x_{i-1}, x_i)}{\prod_{i=1}^n q(x_i, x_{i-1})}$$

depende únicamente de x_0 y x_n.

Probar que en ese caso, una medida invariante para q está dada por

$$m(x_0) = 1 \tag{1}$$

$$m(x) = \prod_{i=1}^n \frac{q(x_{i-1}, x_i)}{q(x_i, x_{i-1})}, \qquad x \in \mathbb{Z}_+^N \setminus x_0, \quad x_n = x \tag{2}$$

Problema 8. Sea B un movimiento Browniano.

(1) Para cada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ medible y acotada defina $P_t f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ por medio de:

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(x + B_t)).$$

Pruebe que $\mathbb{E}\big(f(B_{t+s}) \mid \mathscr{F}_s^B\big) = P_t f(B_s)$ y que por ende $P_t f$ también es acotada.

(2) Pruebe que $(P_t, t \geq 0)$ es un semigrupo:

$$P_t(P_s f) = P_{t+s} f.$$