EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2016-I
12 DE ENERO DEL 2016

Duración: 6 horas
Instrucciones:
(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
(4) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Recuerde que una función de distribución generalizada (f.d.g) es una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

i) F es creciente, i.e. si $-\infty < x \leq y < \infty$ entonces $F(x) \leq F(y)$.
ii) F es continua por la derecha, i.e. $F(x+) = \lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
iii) F está acotada, i.e. existe $M \geq 0$ tal que $|F(x)| \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

1. Demuestre que si F es una f.d.g. entonces F tiene a los más un número contable de discontinuidades.

   Sugerencia: Ver que F es discontinua en x si y sólo si $d(x) = F(x) - F(x-) > 0$, donde $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$. Defina $D_n = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2M/(n+1) < d(x) \leq 2M/n\}$ para toda $n \geq 1$.
2. Sean F_1 y F_2 dos f.d.g., definimos **la convolución de** F_1 **y** F_2, denotada por $F_1 * F_2$, mediante

$$F_1 * F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_2(y) \quad \text{para toda} \quad x \in \mathbb{R},$$

   que es una integral de Riemman Stieltjes. Demuestre que $F_1 * F_2$ es una f.d.g.

Problema 2. Si $\{X_n\}_{n \geq 1}$ y X son v.a. en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ y $X_n \xrightarrow{P} X$ demuestre que existe una subsucesión $\{n_k\}_{k \geq 1}$ tal que $X_{n_k} \xrightarrow{\textbf{a.s}} X$, usando el Lema de Borel-Cantelli.

i) Primero, sea $\epsilon_k \downarrow 0$ fija, y use la definición de convergencia en probabilidad para obtener una subsucesión $\{n_k\}_{k \geq 1}$ tal que $P(\{\omega \in \Omega \,|\, |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| > \epsilon_k\}) \leq 1/2^k$ para toda $k \geq 1$.
ii) Segundo, defina $B_k = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| > \epsilon_k\}$ para toda $k \geq 1$ y pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$.
iii) Finalmente, use el lema de Borel-Cantelli para concluir que $X_{n_k} \xrightarrow{\textbf{a.s}} X$.

Problema 3. Muestre la existencia de un vector (X, Y) de variables aleatorias continuas cuya correlación sea nula y que no sean independientes.

Problema 4. Sea $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ un vector gaussiano centrado.

(1) Enuncie un criterio para que la entrada $n+1$ sea independiente de $X_1, \ldots, X_n$.
(2) Encuentre un vector λ tal que $X_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ y $\{X_1, \ldots, X_n\}$ sean independientes y deduzca una expresión para $\mathbf{E}\left(X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n\right)$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea $(X_n, n \geq 0)$ una cadena de Markov con espacio de estados finito E y matriz de transición P. Defina $A = P - I$, donde I es la matriz identidad y, para una función $f : E \to \mathbb{R}$ (pensada como un vector columna), considere a

$$M_n = f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} Af(X_n).$$

Pruebe que M_n es una martingala respecto de la filtración canónica de X.

Problema 6. Sea $(N_t, t \geq 0)$ un proceso de Poisson de intensidad λ. Definamos $T_0 = 0$ y T_n el tiempo del enésimo salto de N. Considere la función

$$G_i(t) = \mathbf{P}\left(T_i \leq t\right).$$

(1) Pruebe que $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{1}_{T_k \leq t < T_{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k \leq t}$.
(2) Pruebe que $\lim_{x \to 0} G_i(x) = 0$ para toda $i \geq 1$ y que $\lim_{i \to \infty} G_i(x) = 0$ para toda $x \geq 0$.
(3) Pruebe que $\mathbf{E}\left(N_t\right) = \sum_i G_i(t)$ y que $\mathbf{E}\left(N_t^r\right) = \sum_i i^r [G_i(t) - G_{i+1}(t)]$.
(4) Pruebe que para $z \in \mathbb{R}$ tal que $|z| < 1$ ocurre que

$$\mathbf{E}\left(z^{N_t}\right) = 1 + (z-1) \sum_{i=0}^{\infty} G_{i+1}(t) z^i.$$

Problema 7. (1) Sea $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ un proceso de nacimiento y muerte, con espacio de estados $\mathbb{N}_0$ y caracterizado por el generador infinitesimal $Q = \{q_{ij}\}$, donde

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}, & i = j \\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} -\alpha(i + \lambda), & i = j \\ \alpha\lambda, & j = i + 1 \\ i\alpha, & j = i - 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

con $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$.

a) Demuestre que este proceso es estacionario y encuentre su distribución estacionaria.
b) Demuestre que, usando la distribución arriba encontrada como distribución inicial, el proceso es reversible en el tiempo.

Problema 8. Pruebe que un proceso gaussiano centrado $(X_t, t \geq 0)$ es un proceso de Markov si y sólo si su función de covarianza C satisface $C(r,t)C(s,s) = C(r,s)C(s,t)$.