Examen General de Teoría de las Gráficas

Duración: 4 horas. Responder 6 de los siguientes 9 ejercicios (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificarán los 6 primeros).

1. Demuestra que una gráfica conexa y no trivial, G, es euleriana si y sólo si $E(G)$ se puede particionar en subconjuntos E_i, $1 \leq i \leq k$, donde cada subgráfica inducida por el conjunto de aristas E_i es un ciclo.

2. Sea G una gráfica simple con orden $n \geq 3$ y tamaño $m > \binom{n-1}{2} + 1$. Demuestra que G es hamiltoniana.

3. Demuestra el teorema de Hall:
Una gráfica bipartita G con bipartición (X, Y) tiene un apareamiento que satura cada vértice en X si y sólo si
$$|N(S)| \geq |S|, \forall S \subset X.$$

4. Demuestra la fórmula de Euler:
Sea G una gráfica conexa y plana de orden n, tamaño m y número de caras f, entonces
$$n - m + f = 2.$$

5. Demuestra que toda gráfica plana es 5-coloreable.

6. Sea G una gráfica k-conexa y sean $X, Y \subset V$ de cardinalidad al menos k. Demuestra que existe en G una famiia de k (X, Y)- trayectorias ajenas.

7. Para cualquier par de enteros $k, l \geq 2$, demuestra que el número de Ramsey $r(k, l)$ cumple que:
$$r(k, l) \leq r(k, l-1) + r(k-1, l).$$

8. Sea $D = (V, A)$ una digráfica. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función y $S \subseteq A$, denotamos por $f(S) = \sum_{a \in S} f(a)$. Además si $X \subseteq V$, $f^+(X) := f(\Gamma^+(X))$ y $f^-(X) := f(\Gamma^-(X))$, donde $\Gamma^+(X) = \{uv \in A : u \in X, v \notin X\}$ y $\Gamma^-(X) = \{uv \in A : u \notin X, v \in X\}$. Si $x \in V$, $f^+(x) = f^+(\{x\})$ y $f^-(x) = f^-(\{x\})$

    a) Demostrar que $\sum\{f^+(v) : v \in V\} = \sum\{f^-(v) : v \in V\}$,

    b) Demostrar que, para cualquier flujo f en una red N y cualquier conjunto $X \subset V$,
$$\sum_{v \in X} (f^+(v) - f^-(v)) = f^+(X) - f^-(X).$$

9. Demuestra el teorema de Richardson:
Sea D una digráfica la cual no contiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D tiene núcleo.