Examen General de Geometría Diferencial
Semestre 2014–I

Resuelva cinco de los siguientes problemas.
El tiempo para la realización de este examen será de 4 horas sin prórroga.

1. **Variedades diferenciables.** Sea M^n una variedad diferenciable, compacta y $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Muestre que f debe ser singular en algún punto.

2. **Conexiones.** La *torsión* T asociada a una conexión ∇ se define como

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Demuestre que si dos conexiones ∇^1 y ∇^2 tienen las mismas geodésicas y la misma torsión, entonces $\nabla^1 = \nabla^2$.

3. **Métricas.** Muestre que la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$ es una transformación conforme.

4. **Formas Diferenciales.**

   a) Sea M^n una variedad riemanniana y $p \in M$. Muestre que existe una vecindad U de p en M y campos vectoriales ortonormales $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(U)$ tales que forman un *marco geodésico* en p, es decir, para cada i, j se tiene que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.

   b) Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable. Definimos:

   - La *divergencia* de X, denotada $\operatorname{div} X$, como la función de M en $\mathbb{R}$ dada por

   $$\operatorname{div} X(p) = \text{Traza}\{Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)\},$$

   para cada $p \in M$.
   - El *gradiente* de f, denotado $\operatorname{grad} f$, como el campo vectorial en $\mathfrak{X}(M)$ que satisface

   $$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = df_p(v)$$

   para cada $p \in M$, $v \in T_pM$.
   - El *laplaciano* de f, denotado Δf, como $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$.

   Sea $\{E_i\}$ un marco geodésico en p. Escriba las expresiones para $\operatorname{div} X$, $\operatorname{grad} f$ y Δf en términos del marco geodésico.

5. **Curvatura.** Considere el semiplano superior $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica hiperbólica $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

   a) Calcule los símbolos de Christoffel con respecto de esta métrica.

   b) Calcule el transporte paralelo del vector $v = (0,1) \in T_{(0,1)}\mathbb{R}^2_+$ a lo largo de la curva $\alpha(t) = (t, 1)$, $t \in [0, \infty)$ y describa este transporte geométricamente.

   c) Muestre que la curvatura seccional de esta variedad es constante e igual a -1.

6. **Geodésicas.** Sea Y un campo definido a lo largo de una curva $\alpha(s)$. Muestre que la derivada covariante de Y a lo largo de α satisface

$$\frac{DY}{ds} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(P_t(Y_{\alpha(s+t)}) - Y_{\alpha(s)}\right),$$

donde P_t es el transporte paralelo a lo largo de α, de $\alpha(s+t)$ a $\alpha(s)$.

   a) Sea M una variedad riemanniana completa. Sean $\sigma_i : [0,1] \to M$, $i = 1, 2, \ldots$ curvas minimizantes tales que $\sigma_i(0) = p$ y $\sigma_i'(0) \to v \in T_pM$. Muestre que la geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$ es minimizante.

   b) Una geodésica $\gamma : [0, \infty) \to M$ en una variedad riemanniana es un *rayo* que parte de $\gamma(0)$ si minimiza la distancia entre $\gamma(0)$ y $\gamma(s)$ para cualquier $s \in (0, \infty)$. Suponga que M es completa, no compacta, y sea $p \in M$. Muestre que M contiene un rayo que parte de p.