Examen General de Estadística
Semestre 2017-1. Viernes 20 de Enero de 2017.
Horario: 9:00-14:00 hrs.

El examen está dividido en tres secciones, las tres preguntas que corresponden a la sección de Inferencia son obligatorias. De las seis preguntas restantes, correspondientes a las secciones de Modelos Lineales e Inferencia Bayesiana, deberá responder únicamente tres.

Inferencia

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución con densidad $f(x; a, \theta) = \theta a^\theta x^{-(\theta+1)} I_{(a,\infty)}(x), \theta > 0, a > 0$

   a) Exhibe la función de verosimilitud $l(a, \theta)$ y encuentra el estimador máximo verosímil de θ cuando a es conocido.

   b) Encuentra el estimador máximo verosímil de a cuando θ es conocido (observa que la función de verosimilitud con θ fijo, vista como función de a es creciente en a, en $(0, x(1))$ y cero si $a \geq x(1)$, siendo $x(1)$ el mínimo de las x_i's (o sea de la muestra observada).

   c) Habiendo maximizado la verosimilitud para θ con a fija y sabiendo como se maximiza respecto de a, entonces es inmediato identificar los estimadores máximo verosímiles de θ y a.

   d) Exhibe una expresión para la estadística suficiente (minimal) para el problema en cuestión y argumenta cómo se podría mostrar que esa estadística es completa.

2. Sean $(Y_1, Z_1), \ldots, (Y_n, Z_n)$ parejas independientes e idénticamente distribuídas de variables aleatorias independientes entre si, tales que Y se distribuye como exponencial con parámetro $\lambda > 0$ y Z como exponencial con parámetro $\mu > 0$. La parametrización utilizada es con λ, el recíproco del valor esperado de Y, y analogamente para μ.

   a) Encuentra los estimadores máximo verosímiles de μ y λ.

   b) Ahora supongamos que solo observamos las $X_i = min(Y_i, Z_i)$ y registramos las $\Delta_i = 1$ si $X_i = Y_i$ y $\Delta_i = 0$ si $X_i = Z_i$; o sea que los índices i para los cuales $\Delta_i = 1$, corresponden a cuando los mínimos se obtuvieron con las Y's.

Usando las X_i's y las Δ_i's, encuentra los estimadores máximo verosímiles de μ y λ y di cuando no existen.

3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de la distribución uniforme discreta en $1, \ldots, \theta$ donde θ puede ser $= 1, 2, \ldots$.

   a) Observa que tratándose de una distribución discreta, para la prueba de hipótesis, por ejemplo, $H_0 : \theta = \theta_0$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$, si la queremos a un nivel pre-determinado α, la región crítica que resulta descrita en términos de $X_{(n)}$, el máximo de la muestra, no tendría nivel α. Bajo la hipótesis nula, en este caso de uniformidad, la región crítica tendrá una probabilidad $(\frac{k}{\theta_0})^n$, siendo k el número de puntos de $\{1, 2, \cdots \theta_0\}$ que pertenezcan a la región crítica.

   Eso quiere decir qua si nos piden el nivel α podremos buscar una región critica con un k_1 que aproxime por abajo el nivel pedido y otro k_2 que aproxime por arriba el nivel.

   Considera el problema de contraste de hipótesis planteado y verifica que la región crítica deberá ser:
   Rechace H_0 si $X_{(n)} > \theta_0$ o bien si $X_{(n)} \leq k$,
   para ser uniformemente más potente de tamaño

   $$(\frac{k}{\theta_0})^n.$$

   (lo de incluir los puntos a la derecha de θ_0 es porque su inclusión no aumenta el nivel de la prueba (coloquialmente, son gratis y pueden sin embargo aumentar la potencia...), y el incluir los primeros k y no cualesquiera otros k menores o iguales a θ_0 tiene su razón...).

   b) Para la prueba de hipótesis (compuesta contra compuesta) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contra $H_1 : \theta > \theta_0$ muestra que la prueba
   Rechace si $X_{(n)} \geq k$, es uniformemente mas potente de tamaño $(1 - \frac{k}{\theta_0})^n$, con $k < \theta_0$.

   c) Como un comentario general, a la luz de que en las soluciones a estos problemas de prueba de hipótesis en el caso discreto, se pueden construir dos regiones críticas; una con un nivel acequible (el más cercano por abajo, a una α solicitada) y otra con un nivel