Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2017-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- Para aprobar el examen es necesario resolver tres ejercicios *completamente* bien. (Si se resuelven más de tres ejercicios se tomarán en cuenta los tres mejores.)

1. Aplica el método de características para resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_x - \log(1+x)u_y &= 2xu, \quad && x > -1,\ y \in \mathbb{R}, \\ u(0,y) &= e^y, && y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solución encontrada: ¿es única? ¿Cuál es su dominio?

2. Sea $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ una solución de

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \cos(\pi x/2), && 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 1 + 2te^{1-t}, \quad u(1,t) &= 1 - \sin(\pi t), && t > 0, \end{aligned}$$

donde $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$. (Obsérvese que los valores de frontera coinciden en $(0,0)$ y $(1,0)$.) Demuestre que $0 \le u(x,t) < 3$ para todo $(x,t) \in Q$. (Nótese que la segunda desigualdad es estricta.)

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $n \ge 2$. Sea u una función armónica en Ω. Demuestre que:

(a) Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ es una función convexa, entonces $w(x) := f(u(x))$ es una función subarmónica en Ω.

(b) Si consideramos $\Omega = \mathbb{R}^n$ y, además,

$$M := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 \, dx < +\infty,$$

entonces u es idénticamente igual a cero.

4. Encuentre la única solución débil, entrópica, al siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Burgers:

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \le -1, \\ -x, & -1 \le x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

5. Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ una solución de la ecuación de onda homogénea con valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $c > 0$, y f, g son funciones de clase C^1 y de *soporte compacto* (es decir, $f = g \equiv 0$ fuera de un conjunto compacto en $\mathbb{R}$). La energía cinética y la energía potencial se definen mediante

$$E_{\text{cin}}(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\,dx, \quad \text{y,} \quad E_{\text{pot}}(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t)\,dx,$$

respectivamente. Demuestra que:

(a) La energía total, $E(t) := E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$, es constante en $t > 0$.

(b) Existe $T > 0$ tal que $E_{\text{cin}}(t) = E_{\text{pot}}(t)$ para todo $t \geq T$. (A esto se le conoce como el *principio de equipartición de la energía*.)