Posgrado en Ciencias Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

EXAMEN GENERAL

Martes 30 de junio, 2015

Instrucciones: **Resolver todos los problemas**
Máximo de tiempo 4 horas

1. Sistemas no lineales en el plano

   El modelo clásico de especies que compiten está dado por:

$$\frac{du}{dt} = au - bu^2 - kuv$$

$$\frac{dv}{dt} = cv - dv^2 - \sigma uv$$

   donde a, b, c, d, k y σ son constantes positivas.

   Si se quiere estudiar el comportamiento de dos especies prácticamente idénticas ¿Qué se puede hacer?

   Una suposición aceptable es que las dos especies se comportan de la misma manera en ausencia de la otra. Es decir, sus razones de crecimiento y el factor logístico limitante son idénticos para las dos especies. Indique las condiciones en los parámetros para esta propuesta y considere una especie más fuerte que la otra.

   • Esboce este comportamiento en el plano fase con algunas trayectorias. Señale los puntos de equilibrio y las isoclinas nulas. ¿Qué puede concluir de este modelo?

2. Teoría de Floquet

   Dado el sistema de Floquet:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\text{sen }(2t) & \cos(2t) - 1 \\ \cos(2t) + 1 & \text{sen }(2t) \end{bmatrix} x$$

   Muestre que:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t(\cos t - \text{ sen}\, t) & e^{-t}(\cos t + \text{sen }t) \\ e^t(\cos t + \text{ sen }t) & e^{-t}(-\cos t + \text{sen }t) \end{bmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema.

a) Encuentre los multiplicadores de Floquet del sistema.

b) Enuncie un teorema que le permita determinar la estabilidad de la solución trivial.

3. Ciclos límite

Un sistema de ecuaciones diferenciales tiene un solo punto de equilibrio y n ciclos límite y ninguna otra solución periódica. Explique por qué un ciclo límite asintóticamente estable debe ser adyacente a ciclos límite inestables, pero un ciclo límite inestable puede tener ciclos límite estables o inestables adyacentes a él.

Sea C_n el número de posibles configuraciones, con respecto a la estabilidad de n ciclos límite concéntricos. Muestre que: $C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 5$ y en general $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$ (Sucesión de Fibonacci)

Deduzca que

$$C_n = \left\{ \left(2+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} + \left(-2+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1} \right\} / \left(2^{n-1}\sqrt{5}\right).$$

(Nota:

para resolver $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$

puede hacer $C_n = \lambda^n$

Los ciclos límite deben ser ("anidados") concéntricos y de dentro hacia afuera se enumeran como $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots \mathcal{L}_n$)

4. Función de Liapunov

Muestre que α se puede escoger de manera tal que

$$V(x, y) = x^2 + \alpha y^2$$

sea una función de Liapunov fuerte para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \operatorname{sen}^3 x \\ \dot{y} &= -4x - \operatorname{sen}^3 y \end{aligned}$$

y determine la estabilidad de la solución cero.

5. Perturbaciones de sistemas en el plano

Dada la Ecuación de Duffing:

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0 \quad , \quad 0 < \epsilon << 1$$

a) Muestre que si propone como solución

$$u = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + ...$$

obtienen el resultado aproximado un término secular (término no acotado)

b) Proponga un método para eliminar el término no acotado y obtener una mejor aproximación. Explique su respuesta.