Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

19 de enero de 2015

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (3 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida positiva y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $f_k : X \to \mathbb{R}$ y f_k es μ-medible para toda $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_X |f_n| \, d\mu < C \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}\,.$$

Demuestre que si f_n converge puntualmente a una función f, entonces f es sumable y

$$\int_X |f| \, d\mu < C$$

2. (8 puntos) Sean $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1, \mu)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2, \nu)$ dos espacios con medida y considérese las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f es μ medible y g es ν medible

   a) (5 puntos) Dé condiciones sobre $f, g, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ para que $f \circ g$ no sea ν medible.

   b) (3 puntos) Dé condiciones sobre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ para que $f \circ g$ sea siempre medible (para cualesquiera f, g)

3. (6 puntos) Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L_p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ que converge casi siempre a una función f en $L_p[0,1]$. Demuestre que si existe una constante M tal que $\|f_n\|_{L_p} \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int f g d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n g d\lambda \qquad \forall g \in L^q[0,1] \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)\,.$$

(Para demostrar esta afirmación uno puede ayudarse del Teorema de Egorov y de la desigualdad de Hölder)

4. (7 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida positiva finita. Sea $\mathcal{F}$ una colección de funciones tal que $f : X \to \mathbb{R}$ y f es μ medible para toda $f \in \mathcal{F}$. Pruebe que si

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{x\in X:|f(x)|\geq t\}} |f|\, d\mu\right) = 0\,,$$

entonces

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_X |f(x)|\, d\mu < \infty$$

y se cumple que para toda $\epsilon > 0$ existe δ tal que, para $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \delta$ implica

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f|\, d\mu < \epsilon\,.$$

Análisis Complejo

1. (3 puntos) Demuestre que, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, la función

$$f_t(z) = \frac{e^{\mathrm{i}t} + z}{e^{\mathrm{i}t} - z}$$

lleva cualquier punto del interior del círculo unitario a puntos en el semiplano derecho.

2. (3 puntos) Encuentre todas las transformaciones de Möbius (también conocidas como transformaciones fraccionales lineales o bilineales) que dejan fijos los puntos $\{0, 1\}$.

3. (6 puntos) Demuestre que:

   a) (2 puntos) la función

   $$f(z) = \frac{z+1}{z\sin z}$$

   tiene en $z = 0$ un polo de segundo orden (multiplicidad 2) y magnitud 1. (Recordemos que la magnitud o fuerza de un polo es el coeficiente del término de menor potencia en la parte principal de la serie de Laurent).

   b) (2 puntos) la función

   $$f(z) = \frac{\sin z}{1+z}$$

   tiene un polo simple en $z = -1$ y una singularidad esencial en $z = \infty$.

   c) (2 puntos) las funciones de Bessel admiten la representación

   $$J_n(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma z^{-n} \exp\left(\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}$$

   usando como punto de partida la siguiente igualdad

   $$\exp\left(\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n\,.$$

4. (3 puntos) Localice los puntos de ramificación y proponga cortes de ramificación para la función
$$f(z) = \log\left((z-1)(z-2)\right) .$$

5. (3 puntos) Suponga que la función f es analítica en el exterior del círculo unitario. Si resulta que existe $r > 1$ y una sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que
$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-3}$$
para todo z tal que $|z| > r$, entonces $f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-3}$ para todo z fuera del círculo unitario. (Para responder esta pregunta es necesario demostrar la convergencia de la serie en el dominio extendido).

6. (6 puntos) Suponga que las sucesiones $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números reales positivos son tales que
$$b_k < a_k < b_{k+1} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}\,.$$
Demuestre que el producto infinito
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left(1-\frac{z}{b_k}\right)^{-1}$$
converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}_+$ y que la función
$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left(1-\frac{z}{b_k}\right)^{-1}$$
es Herglotz (Recordemos que una función f es Herglotz si es analítica en el semiplano superior $\mathbb{C}_+$ y satisface $f(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$).