Nombre:____________________________________

No. de cuenta:____________________________________

EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA.

15 de Enero de 2016

Tienen 3.5 horas para resolver el examen
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.
Resuelva 5 de los siguientes 6 problemas.

I. De un contraejemplo a la siguiente afirmación.

Un subanillo de un anillo de Noether es de Noether.

II. Demuestre que todo ideal de $\mathbb{Z}$, el anillo de los números enteros, es de la forma $m\mathbb{Z}$ para algún entero m. Demuestre o refute si en un Dominio de Ideales Principales todo ideal primo, no trivial, es máximo.

III. Dar 5 ejemplos de ideales primos en $\mathbb{Z}[x, y]$, donde x y y son indeterminadas. Dar 2 ejemplos de ideales máximos de $\mathbb{Z}[x, y]$, y 2 ejemplos de ideales máximos de $\mathbb{Q}[x, y]$.

IV. Para un anillo conmutativo R y un ideal primo $\mathcal{P} \subset R$, demuestre que hay un isomorfismo canónico

$$Q\left(\frac{R}{\mathcal{P}}\right) \longrightarrow \frac{R_{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}R_{\mathcal{P}}}$$

donde $Q(R/\mathcal{P})$ es el campo de fracciones de $R/\mathcal{P}$.

V. Sea R un anillo y sea $R_{\text{red}} := R/\text{rad}(R)$. Demostrar que R_{red} es reducido y que cualquier homomorfismo de anillos $R \longrightarrow R'$ a un anillo reducido R' factoriza a través de un único homomorfismo de anillos $R_{\text{red}} \longrightarrow R'$.

VI. Considere el anillo de polinomios $k[x, y]$ en dos variables sobre un campo k y sea $R := k[x, y]/(x - xy^2, y^3)$. Escribimos $\overline{x}$, $\overline{y}$ por las clases de residuos de x, y. Demostrar que $\text{rad}(R) = (\overline{x}, \overline{y})$ es el único ideal primo en R y que $R_{\text{red}} \simeq k$.