

Examen diagnóstico para el ingreso al Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM

El tiempo máximo para realizar el examen es de 120 minutos. Las preguntas tienen marcado el puntaje (16 en total) que corresponde a cada respuesta correcta y completa y el resultado será la suma de los puntos obtenidos dividida entre 1.6.

Responda cada una de las preguntas justificando su respuesta.

1. (Sucesiones, series y límites.) Haga lo que se pide:

(a) **(1 punto)** Considere la sucesión $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$. Demuestre que es creciente, acotada por 3, pruebe que tiene límite y calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(b) **(1 punto)** Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \operatorname{sen}(1/k)$.

(c) **(1 punto)** Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

(d) **(1 punto)** Diga si converge o diverge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos^2(n)}{n+1}$.

2. **(3 puntos)** Calcule el real positivo cuya suma con su recíproco es mínima.

3. **(3 puntos)** Encuentre los reales $b \geq 0$ tales que el valor promedio de la función

$$f(x) = 2 + 6x - 3x^2$$

en el intervalo $[0, b]$ es 3.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable y suponga que su gráfica es como se ilustra en la figura 1:

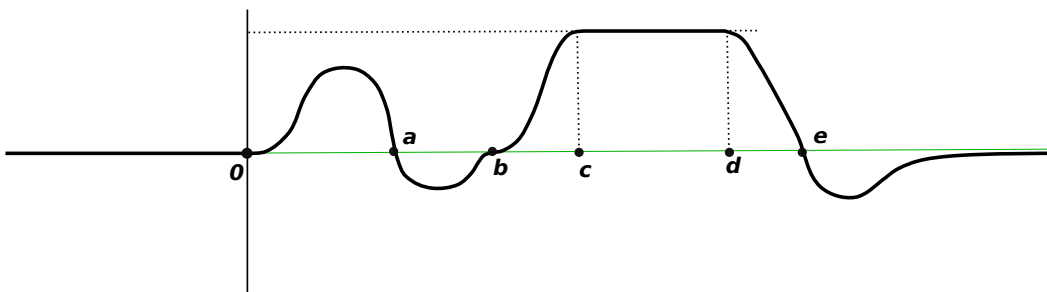
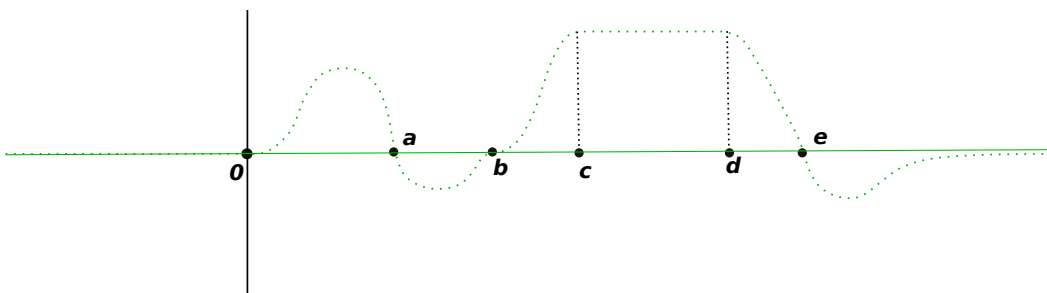
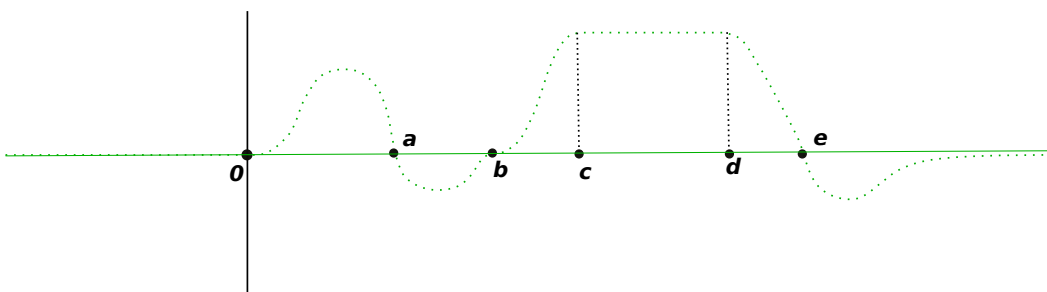


Figure 1:

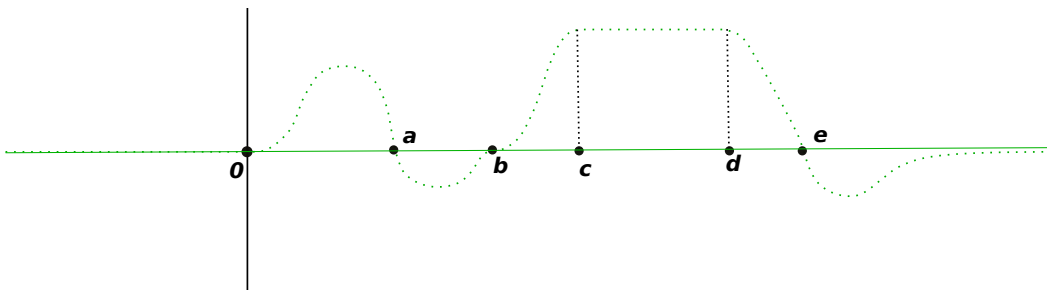
a) (1 punto) Localiza en la figura 1 los puntos críticos, máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.



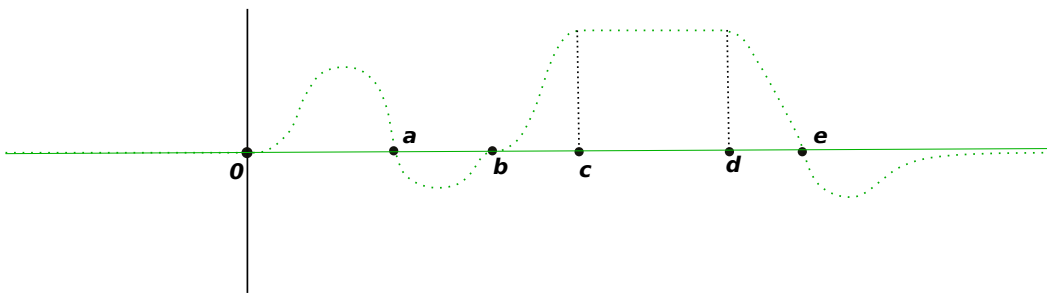
b) (1 punto) bosqueja la gráfica de la integral $I(t) = \int_0^t f(s) ds$:



c) (1 punto) bosqueja la gráfica de la derivada $f'(t)$.



d) (1 punto) bosqueja la gráfica de la 2a derivada $f''(t)$.



5. (a) **(.5 punto)** Grafique la función $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.
- (b) **(.5 punto)** Sea $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq h(x), x > 0\}$. Para cada $t > 0$ considere el círculo

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - t)^2 + (y - 1/t)^2 \leq 1\},$$

Encuentre los valores T para los cuales $H \cap C_T$ consiste solo de un punto y determine el punto.

- (c) **(.5 punto)** Sea $A(t) = \text{Area}(H \cap C_t)$. Bosqueje la gráfica de $A(t)$ y
- (d) **(.5 punto)** Calcule: $\lim_{t \rightarrow 0} A(t)$, $t > 0$.