POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
EXAMEN: GENERAL DE CONOCIMIENTOS (2019-I)
MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL
FECHA: 22 DE ENERO DE 2019

NOMBRE COMPLETO:

§1. Instrucciones

El examen consiste de 8 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 16. Para aprobar el examen se debe obtener al menos 11 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 9:00 A. M. a 2:00 P. M.).

§2. Definiciones y notaciones

Sea X un espacio topológico. El símbolo τ_X representa a la topología de X; además, para cada $E \subseteq X$, denotaremos por $\operatorname{Int}_X E$ y $\operatorname{cl}_X E$ al interior y a la cerradura de E en X, respectivamente.

Se dirá que X es

1. *completamente Hausdorff* si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ de tal modo que $f(x) \neq f(y)$;
2. *localmente compacto* si para cualesquiera $x \in U \in \tau_X$ existe K, un subconjunto compacto de X, con $x \in \operatorname{Int} K \subseteq K \subseteq U$;
3. *de Baire* si la intersección de cualquier familia a lo más numerable de subconjuntos densos abiertos en X resulta ser densa en X;
4. T_3 si es T_2 y para cualesquiera $z \in U \in \tau_X$ existe $V \in \tau_X$ con $z \in V \subseteq \operatorname{cl}_X V \subseteq U$;

Una *familia celular en* X es una familia de conjuntos abiertos no vacíos de X que es ajena por pares.

Dada una función $f : A \to B$, para cualesquiera $E \subseteq A$ y $G \subseteq B$, hacemos $f[E] = \{f(x) : x \in E\}$ y $f^{-1}[G] = \{x \in A : f(x) \in G\}$.

§3. Preguntas

1. Denote por $\mathbb{S}$ la línea de Sorgenfrey (esto es, el espacio topológico que resulta de equipar al conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con la topología que tiene por base a la colección de intervalos semi-cerrados $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$). Demuestre que $\mathbb{S}$ no es un espacio topológico localmente compacto ni segundo numerable.

2. Pruebe que si X es de Baire y $\emptyset \neq U \in \tau_X$, entonces U, como subespacio de X, también es de Baire.

3. Suponga que $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y denote por X al producto topológico de éstos. ¿Cuáles de los enunciados siguientes son ciertos? Justifique su respuesta con una demostración o un ejemplo, según corresponda.

1. Si X es completamente Hausdorff, entonces cada X_α es completamente Hausdorff.
2. Si, para cualquier $\alpha \in A$, X_α es completamente Hausdorff, entonces X es completamente Hausdorff.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Valor	2	3	1.5	2	2.5	1	2	2	16
Tu puntaje									

.

4. Para cada $t \in [2,3]$ sea $X_t = [0,1]$. Denotemos por X al producto cartesiano $\prod_{t\in[2,3]} X_t$ y equipemos a X con la topología generada por *la métrica del supremo* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(\{x_t\},\{y_t\}) = \sup\{|x_t - y_t| : t \in [2,3]\}.$$

¿Es cierto que si $A_t \subseteq X_t$, para cualquier $t \in [2,3]$, entonces

$$\mathrm{cl}_X\left(\prod_{t\in[2,3]} A_t\right) = \prod_{t\in[2,3]} \mathrm{cl}_{[0,1]} A_t?$$

Justifique su respuesta con una demostración o con un ejemplo, según corresponda.

5. Pruebe que si X es un espacio T_3 infinito, entonces X posee una familia celular infinita numerable.

6. Dada una pareja ordenada de números reales $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y un número real $r > 0$, defina

$$B_r(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}.$$

Ahora sea X el espacio que resulta de equipar a $\mathbb{R}^2$ con la topología que tiene por base a

$$\mathscr{B} = \{B_r(z) : r > 0 \text{ y } z \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\} \cup \{\{w\} : w \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\}.$$

Determine cuáles de los enunciados siguientes son ciertos (justifique su respuesta en cada caso).

1. X es primero numerable.
2. X es segundo numerable.
3. X es separable.

7. Suponga que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Considere los enunciados siguientes y pruebe que (1) → (2).

(1) Para cualesquiera $y \in Y$ y $U \in \tau_X$, si $f^{-1}[\{y\}] \subseteq U$, entonces $y \in \operatorname{Int} f[U]$.
(2) Si $B \subseteq Y$, entonces la restricción $f|_{f^{-1}[B]} : f^{-1}[B] \to B$ es una función cociente.

8. Sea X un espacio compacto y T_2. Supongamos que $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos de X. Pruebe que si $C_{n+1} \subseteq C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces el subespacio $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ es compacto, conexo y no vacío.