Examen General de Topología Diferencial
Semestre 2019-I

22 de enero de 2019

1. El examen tendrá lugar en el Salón S-102 del Departamento de Matemáticas, y durará 4 (cuatro) horas (de 9:00 am a 1:00 pm).
2. Todas las preguntas tienen igual peso.

PREGUNTAS

1. *a*) Dé un atlas en S^2, $\{h_i : U_i \to U_{i'} 1 \leq i \leq 2\}$, tal que $U_{i'}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

   b) Dé un atlas en $S^1 \times S^1$ con sólo dos cartas.

   c) Dé un atlas en $S^1 \times S^1$ con tres cartas difeomorfas a $\mathbb{R}^2$.

2. *a*) Pruebe que si M^n y N^m son variedades sin frontera y si $M^n \times N^m$ es orientable, entonces M^n y N^m también son orientables.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (-x^2 + xy - z^2, x^2 + 2xy + 2z^2).$$

   1) Calcule los puntos críticos y demuestre que su imagen tiene medida cero (sin usar Sard).
   2) Demuestre que $(-1, 1)$ es valor regular y calcule $T_{(1,0,0)} f^{-1}\{(-1, 1)\}$.

3. *a*) Sea $\chi : M \to TM$ un campo vectorial suave.Demuestre que existe $\epsilon : M \to (0, \infty)$ suave tal que $\epsilon(x)\chi(x)$ es globalmente integrable (observe que este campo es paralelo al original $\chi(x)$).

   b) Sea $M(n, n, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices de tamaño $n \times n$ y coeficientes en $\mathbb{R}$. Considere a la función determinante $det : M(n, n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Demuestre que si $n = 2$, entonces esta función es de Morse, y que si $n \geq 3$, entonces no lo es.

4. *a*) Demuestre que S^2 y $S^1 \times S^1$ no son difeomorfas y, sin embargo, cada una tiene un atlas de 2 cartas.

   b) Demuestre que $z^2 = e^{-|z|^2}$ tiene 2 soluciones dentro del círculo unitario.