Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica (2018-II)
29 de junio de 2018, 11h

Nombre:____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7. Duración máxima: 4 horas.

1. Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente tal que E es conectable por trayectorias y X es conexo y localmente conectable por trayectorias. Sea $G(p)$ el grupo de transformaciones cubrientes de p. Probar que $G(p)$ actúa transitivamente en las fibras de p si y sólo si $p_*\pi_1(E, e_0)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, p(e_0))$.

2. Considérese el producto de esferas $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$, con $m, n > 1$. Definir una acción continua $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ con $g * (x, y) = (-x, -y)$ y sea Z el espacio de órbitas de esta acción.

   (a) Expresar los grupos de homotopía de Z en términos de los grupos de homotopía de las esferas.

   (b) Dar un representante de cada clase de equivalencia de espacios cubrientes conexos sobre Z.

3. Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un subespacio cerrado. Supóngase que A es un retracto fuerte por deformación de un abierto $U \subset X$, tal que $A \subset U$. Probar que $H_q(X, A; R) \cong H_q(X/A, \{*\}; R)$, donde $*$ es el punto básico canónico de X/A. *Sugerencia:* Ver que la restricción de la función cociente $X - A \longrightarrow X/A - \{*\}$ es un homeomorfismo.

4. Probar que si $m \neq n$, entonces $\mathbb{R}^m$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ una función continua y considérese el espacio de adjunción $Z = \mathbb{S}^{n-1} \cup_f \mathbb{D}^n$. Probar que si $n > 2$, entonces Z no es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{RP}^n$.

¡Mucha suerte!