EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2018-II
28 DE JUNIO DEL 2018

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es 5.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Pueden suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea F la función piso en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, es decir,

$$F(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{para toda} \quad x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{para toda} \quad x \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{1}$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función mayor entero menor o igual a x.
i) Demuestre que F es continua por la derecha y creciente, y que define a la medida de conteo de números naturales en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel. Esto prueba que esta medida de conteo es de Lebesgue-Stieltjes.
ii) Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{N}$, definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Demuestre que la función F definida en la ecuación (1), puede modificarse considerando sumas de números positivos de 0 hasta $\lfloor x \rfloor$, de tal forma que la función modificada es la función de distribución F_X de la variable aleatoria X. Sugerencia: Use la densidad (o función de masa de probabilidades) de X.

Problema 2. Sean $\Omega = (0, 1]$ y $A_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], i \in J_n = \{1, \ldots, n\}$. Sea S_n la σ-álgebra generada por $\{A_i : i \in J_n\}$ y $\mathbb{P}$ la medida de Lebesgue en $(\Omega, B(0, 1])$.

i. Sea $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x^2 + x + 1$. Calcule $\mathbb{E}[g|S_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
ii. Sean $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = i$ si y sólo si $x \in A_i, i \in J_n$. Calcule $\mathbb{E}[f_n|S_n]$ y $\mathbb{E}[f_n|S_{2n}]$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Problema 3. Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ v.a. independientes con valores en $\mathbb{N}$. Pruebe que

i. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ si y sólo si $\mathbb{P}(X_n > 0) \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.
ii. $X_n \xrightarrow{c.s.} 0$ si y sólo si $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > 0) < \infty$.
iii. Si $\mathbb{P}(X_n = n^2) = \beta_n$ y $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \beta_n$. Estudiar la convergencia en L^1, en $\mathbb{P}$ y *c.s.* de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si $\beta_n = \frac{1}{n}$ ó $\beta_n = \frac{1}{n^2}$.

Problema 4. Sea $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes y con la misma distribución. Si $\mathbb{E}[\xi_n] = \mu$, $\mathrm{Var}[\xi_n] = \sigma^2 \in (0, \infty)$ y $\phi_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ para toda

$n \in N$, el teorema central del límite asegura que

$$\frac{\phi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1) \ \ (n \to \infty),$$

en distribución.

Demuestre que $\frac{\phi_n}{\sigma\sqrt{n}}$ no converge en probabilidad (y por lo tanto, tampoco de forma casi segura ni en L^p), ni siquiera cuando $\mu = 0$. (*Sugerencia.* Considere $\frac{\phi_n}{\sigma\sqrt{n}}$ y $\frac{\phi_{2n}}{\sigma\sqrt{2n}}$).

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso Poisson de tasa λ y su filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}$. Fijemos u real y definamos

$$X_t = e^{iuN_t - \lambda t(e^{iu}-1)}.$$

Pruebe rigurosamente que el proceso X_t es una $\mathcal{F}_t$-martingala.

Problema 6. Para $i \in \mathbb{N}$ (incluyendo 0), sean $q_i > 0$ y $0 < \lambda = 1 - \mu < 1$. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ la cadena de Markov a tiempo continuo que brinca de $i \geq 0$ a $i+1$ con tasa λq_i y que brinca de $i > 1$ a $i-1$ con tasa μq_i.

i. Usar un resultado de caminatas aleatorias para mostrar que $(X_t)_{t\geq 0}$ es recurrente si $\lambda \leq \mu$ y transitoria en el otro caso.
ii. Buscar una medida reversible ν asociada a las transiciones.
iii. Si $q_i = q > 0$ para cada i, hallar una distribución invariante cuando $\lambda < \mu$.
iv. Supongamos que $1 < \lambda/\mu < 2$ y que $q_i = 2^i$. ¿Existe una distribución invariante? Recordando que en este caso la cadena es transitoria, ¿Qué podemos concluir?

Problema 7. El *n-coalescente de Kingman* es un modelo aleatorio que representa las genealogías de una población de tamaño n. Es una cadena de Markov en tiempo continuo $(\Pi_n(t))_{t\geq 0}$ con valores en el conjunto de las particiones de $\{1,\ldots,n\}$. Es un proceso de coagulación: su valor inicial es $\Pi_n(0) = (1)\ldots(n)$ (sólo conjuntos unitarios) y cada par de bloques coagula a tasa 1, independientemente de los demás, formando así un nuevo bloque que contiene a los elementos de los dos bloques que han fusionado. El proceso sigue hasta llegar al estado absorbente $(1,\ldots,n)$ (todos los elementos en un solo bloque).

i. Escribir el generador infinitesimal de $(\Pi_3(t))_{t\geq 0}$.
ii. Calcular la esperanza del tiempo necesario para ir del estado inicial al estado final.

Problema 8. Sea α un número real, B un movimiento browniano en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtración canónica generada por B. Sea $\mathbb{Q}$ una medida de probabilidad tal que, para todo $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_A e^{\alpha B_t - \alpha^2 t/2}).$$

Pruebe que B tiene incrementos independientes y estacionarios bajo $\mathbb{Q}$ y que tiene casi seguramente trayectorias continuas. (*Sugerencia.* Utilice funciones generadoras de momentos.)