Examen General de Geometría Diferencial - 2019-1

Viernes 11 de enero del 2019

El examen dura **4 horas.** Resuelva 4 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. Muestre que cada una de las ecuaciones $(a, b, c \neq 0)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= ax, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= by, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= cz \end{aligned}$$

define una superficie regular, y que todas las superficies se intersectan ortogonalmente.

Ejercicio 2. Sea M una variedad compacta de dimensión n. Demuestre que no existe una inmersión de M al espacio euclidiano de dimensión n.

Ejercicio 3. Un *campo de planos* en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$ es una función P tal que a cada $q \in U$ le asocia un plano $P(q)$ que pasa por q. El campo P es diferenciable si los coeficientes de la ecuación de $P(q)$ son funciones diferenciables en q, para todo $q \in U$. Una *superficie integral de* P es una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada $q \in S$, se satisface $T_qS = P(q)$, i.e., S es tangente, en cada uno de sus puntos q, al plano del campo P que pasa por q.

a. Sea $\omega = xdx + ydy + zdz$ una forma diferencial y P el campo de planos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ determinado por ω. Muestre que la superficie integral de P que pasa por $q = (x, y, z)$ es la esfera con centro en el origen y que pasa por q.

b. Sea $\omega = zdx + xdy + ydz$ una forma diferencial. Muestre que el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ determinado por ω no tiene ninguna superficie integral.

Ejercicio 4. Sea $\langle ., . \rangle$ una métrica riemanniana en una variedad M y sea $\langle\langle ., . \rangle\rangle := f^2 \langle ., . \rangle$, donde f es una función suave en M que nunca se anula. Sean ∇ y $\widetilde{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita asociadas a $\langle ., . \rangle$ y $\langle\langle ., . \rangle\rangle$ respectivamente. Finalmente, sea *Grad* el gradiente para la métrica $\langle ., . \rangle$. Demuestre que

$$\widetilde{\nabla}_X Y \ = \ \nabla_X Y \ + \ \frac{1}{f} \left\{ df(X)Y + df(Y)X \ - \ \langle X, Y \rangle Grad(f) \right\}.$$

Recordemos que $Grad(f)$ es el campo sobre M tal que $df = \langle Grad(f), . \rangle$.

Ejercicio 5. Sea p un punto en una variedad riemanniana M. Sea Φ una isometría involutiva (es decir, $\Phi \circ \Phi = Identidad$). Suponga que p es un punto fijo aislado de Φ. Muestre que, para todo $X \in T_pM$, se tiene que

$$D\Phi_p(X) = -X$$

$$\Phi(Exp_p(X)) = Exp_p(-X)$$

siempre que ambos lados de las expresiones estén definidos.

Indicación: será útil considerar $\Phi \circ \gamma$ con γ geodésicas tales que $\gamma(0) = p$.