Examen General de Finanzas Matemáticas

Enero, 2018
Duración: 10:30-14:00 hrs

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto y continuo.

1. Considere un mercado financiero discreto, donde la tasa de interés por periodo es de $r = 2.5\,\%$. Hay una acción cuyo precio a tiempo t es S_t, donde

$$S_{t+1} = \begin{cases} 1.1S_t & \text{con probabilidad } 0.25 \\ 0.9S_t & \text{con probabilidad } 0.75 \end{cases}$$

   El número de periodos es de 4 y el precio inicial es de $S_0 = 100$.

   a) Calcule la medida equivalente de martingala $\mathbb{Q}$ para este mercado.

   b) Sea A una opción americana de venta con precio de ejercicio $K = 110$. Calcule el precio inicial A_0 de la opción.

   c) Sea $B_t = A_0 \times 1.025^t$ y $D_t = \min(A_t, B_t)$ la opción americana convertible a bono, i.e. el derivado que paga el múnimo entre el americano y B_t, el cual se puede ejercer en cualquier momento. ¿Cuál es el precio D_0?

2. En el modelo de Black-Scholes, considere una opción *potencia* de pay-off $g(S_T) = S_T^n$. Mostrar que su precio es de la forma $v(t, x) = \phi(t, T)x^n$. Encontrar la función $\phi(t, T)$ mediante los dos siguientes métodos:

   a) Evaluación riesgo-neutro

   b) Enchufar v en la EDP de Black-Scholes, encontrar una EDO para ϕ y resolverla..

3. Considere el modelo CIR para la tasa spot

$$dr_t = a(b - r_t)rdt + \gamma\sqrt{r_t}dW_t.$$

   Integrando esta EDE y considerando que la integral estocástica tiene esperanza nula, establecer la EDO satisfecha por $\mathbb{E}[r_t]$. Resolver esta ecuación.

4. Considere el modelo HJM donde el precio de un cero-cupón está representado por

$$dB(t, T) = B(t, T)(r_t dt + \sigma(t, T)d\hat{W}_t. \quad B(T, T) = 11,$$

   donde $\hat{W}$ es un movimiento browniano bajo la probabilidad riesgo-neutro $\mathbb{Q}$ y σ es la volatilidad local, posiblemente aleatoria y adaptada.

a) Mostrar que

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left[\int_0^t (\sigma(s,T) - \sigma(s,t))d\hat{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(s,T)^2 - \sigma(s,t)^2)ds\right].$$

b) Deducir de lo anterior que si $f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}$ denota la tasa spot forward y $r_t = f(t,t)$ denota la tasa spot, entonces se tiene que

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\Sigma(s,t)ds - \int_0^t \Sigma(s,t)d\hat{W}_s$$

donde $\Sigma(s,t) = \frac{\partial \sigma(s,t)}{\partial t}$.

Teoría del Riesgo.

5. Responda los siguientes incisos relativos al orden estocástico.

   a) Escriba la definición de orden estocástico ($\leq_{\text{st}}$) entre dos riesgos en términos de sus funciones de distribución.

   b) Demuestre que el orden estocástico es un orden parcial.

   c) Demuestre que si $X_1 \leq_{\text{st}} Y_1, \ldots, X_n \leq_{\text{st}} Y_n$,
   entonces $X_1 + \cdots + X_n \leq_{\text{st}} Y_1 + \cdots + Y_n$.

   d) Demuestre que si X y Y son dos riesgos tales que $X \leq_{\text{st}} Y$, entonces $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$, en donde las primas se calculan bajo el principio de utilidad cero.

6. Sea S un riesgo que sigue un modelo colectivo bajo las hipótesis usuales, en donde el número de reclamaciones N tiene distribución en la clase $(a,b,0)$ y las reclamaciones toman valores $m, m+1, \ldots$, para algún entero $m \geq 0$. Encuentre una fórmula recursiva del tipo Panjer para la distribución de S.