Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico

Jueves 21 de Junio de 2018
Horario : 11:00 a 14:30

Lugar: Lab de Cómputo Científico cub. 240, 2do piso Depto. de Matemáticas.
Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios.

1. [$2pts.$] Demuestre que la matriz es positiva definida y calcule sus eigenvalores.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

   HINT: Los eigenvalores son fáciles de calcular si se escribe la matriz A como una suma de matrices.

2. [$2pts.$] Considere el sistema numérico de punto flotante

$$\mathbb{R}\,(10, 5, -13, 11) = F$$

   a) Incluyendo al cero, ¿cuál es la cardinalidad del sistema?
   b) ¿Cuál es la distancia entre $123.11 \in F$ y el que sigue?
   c) Encuentra la solución más pequeña a la ecuación

$$x \oplus 123.45 = x$$

3. [$2pts.$] Considere la partición $-1 < 0 < 2 < 3$ del intervalo $[-1, 3]$. Calcule un spline cúbico de Hermite, $s(x)$, tal que:

   a) $s(x) \in C^1$
   b) $s(-1) = 2;\ s'(-1) = 1$
   c) $s(0) = 1 = s'(0)$
   d) $s(2) = 1;\ s'(2) = -1$
   e) $s(3) = 2 = s'(3)$

4. [$1pt.$] Explique qué es una regla de cuadratura gaussiana y sus propiedades. Calcule una regla de cuadratura gaussiana de 3 puntos en el intervalo $[-1, 1]$

5. [$2pts.$] Sean $I = [a, b]$, $f : I \to I$, tal que:

   a) f continua

   b) $f(I) \subset I$

   c) $f(x)$ satisface la condición de Lipschitz constante $L < 1$, en I. Demuestre que para cualquier $x \in I$ la sucesión

   $$x_{n+1} = f(x_n)$$

   converge a la única solución de $x = f(x)$

6. [$1pt.$] Demuestre que si $\parallel A \parallel < 1$ entonces $I - A$ es invertible.