VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

9 de enero del 2019
Semestre 2019-1

Puntos: 48   Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea $(\Omega = [1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \mu = \lambda)$ el espacio de medida de Lebesgue en $[1,\infty)$, con la sigma álgebra de los borel medibles y sea $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ una función en $L^p(\mu)$ para algún $p \geq 1$. Recuerda que

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M \geq 0 \,|\, |f(x)| \leq M, c.d.[\mu]\}.$$

Da un contraejemplo para ver que si $1 \leq p < r \leq \infty$ con p y r fijas NO se cumple que

$$L^r([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \mu = \lambda) \subset L^p([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \mu = \lambda).$$

Sugerencia: Considere primero el caso $r = \infty$, y después para $r < \infty$ busque cuales funciones f de la forma x^a con $a \in \mathbb{R}$ son integrables en $[1,\infty)$.

2. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

   a) Demuestra que el espacio $L^\infty(\mu)$ está contenido en $L^1(\mu)$ si y sólo si $\mu(X) < \infty$.
   b) Si $\mu(X) = 1$ y $f \in L^\infty(\mu)$, prueba que

$$\|f\| = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

3. (6 puntos) Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y sea f integrable en $\mathbb{R}^n$.

   a) Prueba que la función $\phi(r) = \int_{|x|\leq r} f d\lambda$ es contínua en $[0,\infty)$.

b) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda \neq 0$. Usa el inciso anterior para probar que existe $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_E f d\lambda = \int_{E^c} f d\lambda.$$

4. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

a) Sea f medible en X y $p > 0$. Prueba que

$$\mu(\{x \in X : |f| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int_{\{x \in X : |f| > t\}} |f|^p d\mu.$$

b) Tomando $t = 1/n$ en el inciso anterior prueba que si existe $f > 0$ en $L^p(\mu)$ para alguna $1 \leq p < \infty$, podemos escribir $X = \cup_n X_n$ donde X_n es medible con $\mu(X_n) < \infty$, es decir μ es $\sigma-$finita.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Sea Ω una región del plano complejo que contiene al disco cerrado $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.

   Sean f y g dos funciones holomorfas en Ω y tales que $|f(z)| = |g(z)|$ para todo $|z| = R$. Prueba que sí ninguna de las dos funciones se anula en ningún punto de $D(0, R)$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, tal que $f = \lambda g$ en Ω.

2. (6 puntos) Sea f una función holomorfa en el disco perforado $D(0, R)\backslash\{0\}$. Si f tiene una singularidad no removible en 0 prueba que e^f tiene una singularidad esencial en 0.

3. (6 puntos) Demuestra que para cualquier $a \in \mathbb{C}$ y cualquier $n > 2$, el polinomio $az^n + z + 1$ tiene al menos una raíz en el disco cerrado $D(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

   Sugerencia: Puedes usar el teorema de Rouché para el caso $|a| < 1/2^n$.

4. (6 puntos)

   a) Pruebe que una función f no constante, holomorfa en $\mathbb{C}$ menos un subconjunto finito donde f tiene polos y tal que $\lim_{z \to \infty} f(z) = \alpha$ existe (puede ser infinito), es de la forma P/Q donde P, Q son polinomios.

   b) ¿que puede decir de los grados de P, Q si α es 0 ó ∞, respectivamente ?