Examen General de Conocimientos
Álgebra Moderna.
Enero 13 de 2014.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Resolver 4 ejercicios de Grupos y cuatro ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1 Grupos.

1. Enuncia y demuestra el Teorema de Cayley.

2. Sea G un grupo con subgrupos normales H y K. Demuestra que si $G = H \cdot K$ y $H \cap K = \{e\}$, entonces G es isomorfo al grupo $H \times K$.

3. Enuncia y demuestra el segundo Teorema de Isomorfismo.

4. Demuestra que no hay grupos simples de orden $255 = 3 \times 5 \times 17$.

5. Demuestra que si D es un grupo divisible y D es un subgrupo de un grupo abeliano G, entonces D es un sumando directo de G.

2 Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que todo dominio entero finito es un campo.

2. Sea K un campo e I un ideal distinto de cero de $K[x]$. Demuestra que son equivalentes:
   a) I es un ideal primo;
   b) I es un ideal máximo;
   c) I está generado por un polinomio irreducible.

3. Demuestra que toda extensión normal, finita y separable E del campo F, tiene sólo un número finito de campos intermedios.

4. Sean E una extensión del campo F y $\alpha, \beta \in E$ tales que α es algebraico sobre F y β es algebraico sobre $F(\alpha)$. Demuestra que β es algebraico sobre F.

5. Demuestra que para todo p primo y para todo n natural positivo, existe un único campo de orden p^n.