

Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2019-I.
17 de enero de 2019.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sea G un grupo finito que tiene un subgrupo H de índice p , donde p es el menor primo que divide a $|G|$. Demuestra que H es un subgrupo normal de G .
2. (a) Sean G un grupo finito y H un p -subgrupo de G . Demuestra que

$$[G : H] \equiv [N_G(H) : H] \pmod{p}.$$

Sugerencia: Define una acción de H sobre el conjunto de las clases laterales izquierdas de H y analiza los puntos fijos de esta acción.

(b) Sea G un p -grupo finito no trivial. Demuestra que cualquier subgrupo propio de G está contenido propiamente en su normalizador.

3. Sea G un grupo no abeliano de orden p^3 con p primo. Demuestra que $|Z(G)| = p$, $G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y que $Z(G) = G'$ donde G' es el subgrupo conmutador de G .
4. Recuerda que se define inductivamente la serie derivada de un grupo G como:

$$G^{(0)} := G, \quad G^{(1)} := [G, G] \quad \text{y} \quad G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}].$$

Demuestra que G es soluble si y sólo si existe un natural n tal que $G^{(n)} = \{1\}$.

5. Sea G un grupo de orden finito. Demuestra que si G es cíclico, entonces para cada divisor positivo d de $|G|$, existe un único subgrupo K de G de orden d .

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea R un D.F.U. Demuestra que R es un D.I.P. si todo ideal primo (respectivamente máximo) es principal.
2. Considera $\mathbb{Z}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ y una “norma” N definida como $N(x) := |a^2 - 5b^2|$ si $x = a + b\sqrt{5}$. Demuestra que:
 - (a) Si x no es cero y no es unidad, entonces $N(x) \geq 4$.
 - (b) x es irreducible si $4 \leq N(x) < 16$.
 - (c) 4 se factoriza como producto de irreducibles, pero no de manera única.Concluye que $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$ no es un D.F.U.
3. Sean k un campo, $K := k(x)$ el campo de cocientes de $k[x]$ y $u \in K$. Demuestra que $K = k(u)$ si y sólo si $u = \frac{ax+b}{cx+d}$ para algunos $a, b, c, d \in k$ tales que $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.
4. Sean $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ y E su campo de descomposición. Demuestra que $\text{Gal}(E|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
5. Sea $F|_E$ una extensión de campos tal que $[F:E] < \infty$. Supón que para cualesquiera dos subcampos F_1 y F_2 de F que contienen a E , se tiene que $F_1 \subseteq F_2$ o $F_2 \subseteq F_1$. Demuestra que existe un elemento $\alpha \in F$ tal que $F = E(\alpha)$.