Examen General de Conocimientos
Álgebra Moderna
20 de junio de 2016.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Resolver 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. Además justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si G es un grupo finito con $o(G) = p^n m$ donde $n \geq 1$ y $p \nmid m$, entonces G contiene un subgrupo de orden p^n .

2. Sea G un grupo de orden p^n con $n \geq 1$. Demuestra que:
   (i) Para cada $1 \leq k \leq n$, G tiene un subgrupo de orden p^k que es normal en G;
   (ii) Para cada $1 \leq k < n$ y para cada subgrupo H de orden p^k de G, existe un subgrupo L de orden p^{k+1} de G tal que H es normal en L.
   Sugerencia: Puedes usar el hecho de que si H es un p-subgrupo de un grupo finito G, entonces $[N_G(H) : H] \equiv [G : H] \ (mod\, p)$.

3. Demuestra que si $\cdot : G \times X \to X$ es una acción de un grupo finito G en un conjunto finito X, entonces para cada $x \in X$ se cumple la igualdad $\mid G \cdot x \mid = [G : G_x]$, donde $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ y $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

4. Demuestra que S_4 es un grupo soluble pero que S_n no es un grupo soluble para $n \geq 5$.

5. Demuestra que son equivalentes para un grupo G:
   (i) Para toda $x \in G$ y para toda n natural existe $y \in G$ tal que $x = ny$.
   (ii) Para toda $x \in G$ y para todo p primo existe $y \in G$ tal que $x = py$.
   (iii) G no tiene cocientes simples.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea R un dominio entero y a un elemento de R distinto de cero.
   (i) Demuestra que si a es primo en R, entonces es irreducible en R.
   (ii) Demuestra que si R es un dominio de ideales principales y a es irreducible en R, entonces a es primo en R.

(iii) Demuestra que si R es un dominio de ideales principales y a es irreducible en R, entonces el anillo cociente ${}^{R}/_{aR}$ es un campo.

2. Sea F un campo. Demuestra que son equivalentes para un ideal distinto de cero I de $F[x]$:
(i) I es un ideal primo.
(ii) I es un idead máximo.
(iii) I está generado por un polinomio irreducible.

3. Sean ω una raíz cúbica primitiva de 1 sobre $\mathbb{Q}$ y β la raíz real cúbica de 3. Si $K = \mathbb{Q}(\beta, \omega)$, demuestra que $K \mid \mathbb{Q}$ es una extensión de Galois y calcula su grupo de Galois.

4. Sean $F \leq K \leq E$ extensiones de campo y supongamos que $E \mid F$ y $K \mid F$ son extensiones de Galois. Demuestra que $Gal\,(E \mid K)$ es un subgrupo normal de $Gal\,(E \mid F)$ y que $Gal\,(K \mid F) \cong {}^{Gal(E|F)}/_{Gal(E|K)}$.