**Examen General de Conocimientos**
**Álgebra Moderna.**
**Junio de 2014.**

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 4 horas. Resolver 4 ejercicios de Grupos y cuatro ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois.

# 1 Grupos.

1. Sean $G$ un grupo finito y $p$ un primo. Demuestra que si $p$ divide al orden de $G$, entonces existe un elemento en $G$ de orden $p$.
2. Suponga que $G$ es un grupo finito y $N$ es un subgrupo normal de $G$ de índice 4.
   $a$) Demuestra que $G$ tiene un subgrupo de índice 2, necesariamente normal.
   $b$) Si ${}^{G}/_{N}$ no es cíclico, demuestra que $G$ es la unión de tres subgrupos.
3. Demuestra que si $G$ es un grupo finito simple y tiene un subgrupo $H$ tal que el índice de $H$ en $G$ es un número natural $n$, entonces existe un homomorfismo de grupos inyectivo $\varphi$ de $G$ en el grupo simétrico $S_n$.
4. ¿Cuántos grupos de orden 33 hay salvo isomorfismo? Justifique su respuesta.
5. Suponga que $G$ es un grupo y $H$ es un subgrupo de $G$.
   $a$) Demuestra que si $G$ es soluble entonces $H$ es soluble.
   $b$) Demuestra que si $G$ es soluble y $H$ es normal en $G$, entonces ${}^{G}/_{H}$ es soluble.
   $c$) Demuestra que si $H$ es normal en $G$, $H$ es soluble y ${}^{G}/_{H}$ es soluble, entonces $G$ es soluble.

# 2 Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio de ideales principales.
2. Demuestra que si $I_1,..., I_m$ son ideales de un anillo $R$ tales que $I_j + \bigcap_{k\neq j} I_k = R$ para $1 \leq j \leq m$, entonces para cualquier $(a_1, ..., a_n)$, $a_i \in R$, existe una $a \in R$ tal que $a \equiv a_k (mod\, I_k)$ para toda $k$.
3. Demuestra que todo polinomio mónico de grado positivo $f(x) \in F[x]$ tiene un campo de factorización $E\mid_F$.
4. Sean $K \leq L \leq E$ extensiones de campo y suponga que $E\mid_K$ y $L\mid_K$ son extensiones de Galois. Demuestra que $Gal(E\mid_L)$ es un subgrupo normal de $Gal(E\mid_K)$ y que $Gal(L\mid_K) \cong {}^{Gal(E|_K)}/_{Gal(E|_L)}$.

5. Demuestra que el polinomio $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ no es soluble por radicales.