EXAMEN: GENERAL

FECHA: 2 DE JULIO DE 2015

MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL

NOMBRE COMPLETO:

Instrucciones

El examen posee 8 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 18. Para aprobar el examen se debe obtener al menos 10 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 10:00 A. M. a 3:00 P. M.).

Definiciones y notaciones

Para un espacio topológico X y un subconjunto A de X, los símbolos $\overline{A}$, $\mathrm{Int}_X(A)$ y $\mathrm{Bd}_X(A)$ denotan la cerradura, el interior y la frontera de A en X, respectivamente.

Un espacio topológico es *localmente conexo* si cada punto de éste posee una base formada por subconjuntos abiertos conexos.

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *de Tychonoff* si es de Hausdorff y para cualesquiera C, subconjunto cerrado de X, y $p \in X \setminus C$ existe una función continua $f : X \to [0,1]$ de tal modo que $f(p) = 0$ y $f(C) \subset \{1\}$. Por otro lado, X es T_3 si es de Hausdorff y para cualesquiera U, subconjunto abierto de X, y $p \in U$ existe V, un subconjunto abierto de X, con $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Cada vez que se hable de *el producto topológico* de una familia de espacios nos estaremos refiriendo al espacio topológico que resulta de equipar al producto cartesiano de los espacios con la topología producto.

Preguntas

1 (1 punto). Suponga que X es un espacio topológico arbitrario y que $U \subseteq X$. Demuestre que U es abierto en X si y sólo si

$$\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A},$$

para cualquier $A \subseteq X$.

2 (2 puntos). Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos en la que

$$\{\alpha \in A : X_\alpha \text{ es compacto}\}$$

es un conjunto finito. Demuestre que cualquier subconjunto compacto del producto topológico $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ tiene interior vacío.

3 (2 puntos). Pruebe que si X es un espacio de Hausdorff y $f : [0,1] \to X$ es continua y suprayectiva, entonces X es localmente conexo .

4 (3 puntos). Un espacio topológico X es llamado *homogéneo* si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ de tal modo que $h(x) = y$.

1. Determine cuáles de los siguientes espacios son homogéneos. Justifique su respuesta.
   a) $(\mathbb{R}, \sigma)$, donde σ es la topología del ejercicio 8.
   b) El espacio que resulta de equipar a $\mathbb{R}$ con la topología cuya base es
   $$\{(a,b) \cup A : a, b \in \mathbb{R},\ a < b \text{ y } A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$
2. Demuestre que el producto topológico arbitrario de espacios topológicos homogéneos es un espacio topológico homogéneo.

5 (3 puntos). Determine cuáles de los enunciados siguientes son ciertos y cuáles son falsos. En cada caso, justifique su respuesta.

1. Existe un espacio de Tychonoff que es conexo e infinito numerable.
2. Existe un espacio T_3 que es conexo e infinito numerable.

6 (2 puntos). Suponga que X es un espacio compacto de Hausdorff y demuestre que para cada función continua $f : X \to X$ existe A, un subconjunto cerrado no vacío de X, con $f(A) = A$.

7(2 puntos). Sean E, una relación de equivalencia en el espacio topológico X, y $q : X \to X/E$, la proyección natural. Demuestre que si q es una función abierta y $B \subseteq X/E$, entonces B es homeomorfo al espacio cociente $q^{-1}(B)/R$, donde $q^{-1}(B)$ tiene la topología que hereda como subespacio de X y R es la relación de equivalencia $E \cap (q^{-1}(B) \times q^{-1}(B))$.

8 (3 puntos). Consideremos en $\mathbb{R}$ las topologías σ y τ que tienen por base, respectivamente, a las siguientes familias:

$$\mathcal{B}_0 = \{[a, b) \colon a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}_1 = \{[a, b) \colon a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}.$$

Determine cuáles de los siguientes productos topológicos son metrizables. En cada caso, justifique su respuesta.

1. $(\mathbb{R}, \sigma) \times (\mathbb{R}, \sigma)$.
2. $(\mathbb{R}, \sigma) \times (\mathbb{R}, \tau)$.
3. $(\mathbb{R}, \tau) \times (\mathbb{R}, \tau)$.

Pregunta	1	2	3	4(1)	4(2)	5(1)	5(2)	6	7	8	Total
Valor	1	2	2	2	1	1	2	2	2	3	18
Tu puntaje											