EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA GENERAL

Julio de 2014

El examen consta de 4 preguntas, y cada una tiene un valor asignado. El total de puntos que se puede obtener es 24. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 16 puntos. El tiempo del examen es de 5 horas. La frontera de un subconjunto A de un espacio topológico X, se denota por $\mathrm{Fr}_X(A)$. La cerradura de A en X se denota por $\mathrm{Cl}_X(A)$.

(1) Determina el valor de verdad de las siguiente afirmaciones, justificando tu respuesta:
   a) **(3 puntos)** Todo conjunto X admite una métrica d tal que si τ_d es la topología inducida por d en X, entonces el espacio topológico (X, τ_d) es de Lindelöf y conexo.
   b) **(3 puntos)** Todo espacio T_1 que no es T_2 posee un subconjunto compacto cuya cerradura es compacta.
   c) **(3 puntos)** Si X es un espacio topológico y $A, B \subseteq X$, entonces $\mathrm{Fr}_X(A \cup B) = \mathrm{Fr}_X(A) \cup \mathrm{Fr}_X(B)$ si $A \cap \mathrm{Cl}_X(B) = \emptyset$ y $\mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \emptyset$.
   d) **(3 puntos)** Con la topología de la caja, todo producto de compactos es compacto.

(2) **(3 puntos)** Una función $f\colon X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y es *perfecta* si f es continua, cerrada y, para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es compacto en X. Prueba que si $f\colon X \to Y$ es perfecta y Y es de Lindelöf, entonces X es de Lindelöf.

(3) **(4 puntos)** Sea X un espacio compacto, conexo y T_2. Supongamos que A es un subconjunto cerrado y no vacío de X tal que $A \neq X$. Prueba que si C es una componente (conexa) de A, entonces $C \cap \mathrm{Fr}_X(A) \neq \emptyset$.

(4) **(5 puntos)** Sean $X = [0,1] \times [0,1]$ y $\Delta = \{(x,x)\colon x \in [0,1]\}$ la diagonal de X. Si $p = (s,t) \in X \setminus \Delta$, entonces para cada $\varepsilon \in (0, |t-s|)$, definimos

$$V_\varepsilon(s,t) = \big[\{s\} \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\big] \cap X$$

y

$$\mathcal{B}_p = \big\{V_\varepsilon(s,t)\colon \varepsilon \in \big(0, |t-s|\big)\big\}.$$

Si $p = (s,s) \in \Delta$ y F es un subconjunto finito de $[0,1]$ tal que $s \notin F$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ definamos

$$M_{\varepsilon,F}(s,s) = \big[\big([0,1] \setminus F\big) \times (s-\varepsilon, s+\varepsilon)\big] \cap X;$$

y consideramos la familia

$$\mathcal{B}_p = \big\{M_{\varepsilon,F}(s,s)\colon \varepsilon > 0, F \subseteq [0,1] \setminus \{s\} \text{ y } F \text{ es finito}\big\}.$$

Sea τ la topología generada por la familia $\{\mathcal{B}_p : p \in X\}$. Al espacio (X, τ) se le llama cuadrado de Alexandroff. Determina si (X, τ) posee cada una de las siguientes propiedades: es compacto, es conexo, es localmente conexo, es separable, es primero numerable, es segundo numerable y es T_4. Justifica tu respuesta.