Examen General de Topología General (Enero 2014)

El examen consta de 7 problemas y tiene una duración de 6 horas (de 10:00 am a 4:00 pm). El total de puntos es de 21. Para aprobar el examen se debe obtener un total de al menos 13 puntos.

Sea X un espacio topológico. Si $A \subset X$, entonces $\mathrm{cl}_X(A)$ representa la cerradura de A en X. Decimos que X es T_3 si X es T_0 y para cada $x \in X$ y todo cerrado C en X con $x \notin C$, existen abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $C \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

1. (**2 puntos**) Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y U un abierto en X. Prueba que $\mathrm{cl}_X(U \cap \mathrm{cl}_X(A)) = \mathrm{cl}_X(U \cap A)$.

2. (**3 puntos**) Construye una topología τ en $\mathbb{R}$ tal que el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau)$ es T_2, no es T_3 y tiene como abierto al conjunto de los irracionales. Justifica tu respuesta.

3. (**2 puntos**) Una función $f \colon X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y es *perfecta* si f es continua, cerrada y, para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es compacto en X. Prueba que si $f \colon X \to Y$ es perfecta, suprayectiva y X es T_2, entonces Y es T_2.

4. (**4 puntos**) Sean $\{X_s \colon s \in S\}$ y $\{Y_s \colon s \in S\}$ dos familias no vacías de espacios topológicos no vacíos. Para cada $s \in S$ sea $f_s \colon X_s \to Y_s$ una función. Hagamos $X = \prod_{s \in S} X_s$ y $Y = \prod_{s \in S} Y_s$ y supongamos que X y Y poseen la topología producto. Consideremos la función $f \colon X \to Y$ definida, para $(x_s)_{s \in S} \in X$, como $f((x_s)_{s \in S}) = (f_s(x_s))_{s \in S}$. Prueba que f es perfecta si y sólo si cada f_s es perfecta.

5. (**3 puntos**) Sea $\{C_s \colon s \in S\}$ una familia no vacía de subconjuntos compactos, conexos y no vacíos de un espacio topológico X. Supongamos que X es T_2 y que $C = \bigcap_{s \in S} C_s$. Supongamos además que para cada $s_1, s_2 \in S$, existe $s_3 \in S$ tal que $C_{s_3} \subset C_{s_1} \cap C_{s_2}$. Prueba que C es compacto, conexo y no vacío.

6. (**3 puntos**) Una función continua $f \colon X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y es *monónota* si para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo. Supongamos ahora que $f \colon X \to Y$ es una función cociente. Prueba que para cada $B \subset Y$ tal que B es abierto o cerrado en Y, la restricción $f_B \colon f^{-1}(B) \to B$ es una función cociente, en donde $f_B(x) = f(x)$ para cada $x \in f^{-1}(B)$. Prueba ahora que si f es una función cociente y monótona, entonces para cada subconjunto conexo C de Y tal que C es abierto o bien cerrado en Y, el conjunto $f^{-1}(C)$ es conexo.

7. (**4 puntos**) Un espacio topológico X es de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X posee una subcubierta numerable. Construye un espacio topológico X tal que X es T_3, de Lindelöf, no es compacto y el producto $X \times X$ no es de Lindelöf. Justifica tu respuesta.