EXAMEN: GENERAL FECHA: 1 DE JULIO DE 2016

PROFESORES: GERARDO ACOSTA GARCÍA
ROBERTO PICHARDO MENDOZA

MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL

NOMBRE COMPLETO:

§1. Instrucciones

El examen consiste de 7 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 28. Para aprobar el examen se debe obtener al menos 18 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 10:00 A. M. a 3:00 P. M.).

§2. Definiciones y notaciones

El símbolo $\mathbb{N}$ representará al conjunto de números naturales. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será llamada *residualmente constante* si existe $m \in \mathbb{N}$ de tal modo que $a_n = a_m$, para cada $n \geqslant m$.

Para cada conjunto A, $|A|$ será su cardinalidad y $\mathscr{P}(A)$ representará al conjunto potencia de A. Si f es una función cuyo dominio es A y $B \subseteq A$, entonces $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$. Además, el símbolo $A \setminus B$ será usado para denotar al conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$.

Sea X un espacio topológico. Si $A \subseteq X$, los símbolos $\operatorname{cl}_X A$ y $\operatorname{Int}_X A$ (ó $\overline{A}$ y $\operatorname{Int} A$ si no hay riesgo de confusión) denotan a la cerradura y al interior de A en X, respectivamente. Diremos que X es

1. *regular* si para cada F, subconjunto cerrado de X, y cualquier $z \in X \setminus F$ existen abiertos ajenos U y V de X con $z \in U$ y $F \subseteq V$;
2. *normal* si para cualesquiera F y G, cerrados ajenos de X, existen U y V, abiertos ajenos de X, con $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

§3. Preguntas

1 (5 puntos). Determine cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos y cuáles son falsos. En cada caso, argumente su respuesta.

1. Los espacios discretos son los únicos espacios topológicos en los que las sucesiones convergentes son, precisamente, las residualmente constantes.
2. Si $f : X \to Y$ es una función entre espacios topológicos y $z \in X$, entonces f es continua en z si y sólo si para cada $E \subseteq X$ la pertenencia $z \in \operatorname{cl}_X E$ implica que $f(z) \in \operatorname{cl}_Y f(E)$.
3. Siempre que X es un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ es una función cociente, se tiene que Y también es T_2.

2 (3 puntos). Sea $\mathscr{A}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados no vacíos del espacio topológico X que satisface las condiciones siguientes.

1. Al menos un elemento de $\mathscr{A}$ es compacto.
2. Para cualesquiera $A, B \in \mathscr{A}$ se tiene que $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$.

Demuestre que $\bigcap \mathscr{A} \neq \emptyset$ y que si U es un subconjunto abierto de X y $\bigcap \mathscr{A} \subseteq U$, entonces existe $A_0 \in \mathscr{A}$ con $A_0 \subseteq U$ (*nota*: asegúrese de que los teoremas que está empleando en su respuesta pueden ser usados en el examen).

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	Total
Valor	5	3	5	6	3	3	3	28
Tu puntaje								

3 (5 puntos). Suponga que (X,τ) es un espacio topológico y para cada $M \subseteq X$ defina

$$\sigma_M = \{G \cup E : G \in \tau \text{ y } E \subseteq M\}.$$

Se puede comprobar, pero no es necesario que usted lo haga, que σ_M es una topología para el conjunto X. Usaremos el símbolo X_M para denotar al espacio (X, σ_M).

1. Pruebe que M es un subconjunto abierto y discreto de X_M.
2. Determine cuáles de los enunciados siguientes son ciertos. En cada caso, argumente su respuesta dando una prueba o exhibiendo un ejemplo.
   a) Si (X,τ) es primero numerable, entonces X_M es primero numerable.
   b) X_M es segundo numerable siempre que (X,τ) lo sea.
   c) La separabilidad de (X,τ) implica la de X_M.

4 (6 puntos). Para los fines de este ejercicio d será la métrica euclideana en $\mathbb{R}^2$ y $M = \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Además, para cualesquiera $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$, definimos

$$B_r(x,y) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),z) < r\}.$$

Considere ahora las colecciones

$$\mathscr{B}_0 = \{\{(x,0)\} \cup B_y(x,y) : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y > 0\} \qquad \text{y} \qquad \mathscr{B}_1 = \{M \cap B_r(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ r > 0\}.$$

Se puede probar (pero no es necesario que usted lo haga) que $\mathscr{B}_0 \cup \mathscr{B}_1$ es base para alguna topología en M. Al espacio topológico resultante se le llama *el plano de Moore-Niemytzki* y lo denotaremos por M.

1. Demuestre que M es separable, T_2 y regular.
2. Pruebe que M no es normal (puede emplear libremente el Lema de Jones: si X es un espacio separable y normal, entonces $|\mathscr{P}(D)| \leqslant |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ siempre que D es un subconjunto discreto y cerrado de X).
3. ¿Es M un espacio segundo numerable?

5 (3 puntos). Suponga que $\sim$ es una relación de equivalencia en el espacio topológico X, haga $E = \{(x,y) \in X \times X : x \sim y\}$ y considere la proposición

$(*)$ E es un subconjunto cerrado de $X \times X$.

Demuestre los siguientes enunciados.

1. Si $(*)$ es cierta y la función cociente natural, $p : X \to X/\sim$, es abierta, entonces el espacio cociente $X/\sim$ es T_2.
2. Si $X/\sim$ es de Hausdorff, entonces $(*)$ es cierta.

6 (3 puntos). En este ejercicio X será un espacio compacto T_2 y $f : X \to Y$ será una función continua y suprayectiva. Emplee estas hipótesis para probar los enunciados siguientes.

1. Si $\mathscr{B}_X$ es una base para X y $\mathscr{F}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de $\mathscr{B}_X$, entonces la colección
$$\mathscr{B}_Y = \left\{Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup \mathscr{A}\right) : \mathscr{A} \in \mathscr{F}\right\}$$
es una base para la topología de Y.
2. Si X es metrizable y Y es T_2, entonces Y es metrizable (puede usar libremente el Teorema de Metrización de Urysohn: todo espacio topológico regular, T_2 y segundo numerable es metrizable).

7 (3 puntos). Sean A y B un par de subconjuntos cerrados no vacíos del espacio topológico X. Demuestre que si $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos. Muestre, mediante un ejemplo, que la hipótesis "A y B son cerrados" no puede ser eliminada.