Examen General de Topología Diferencial
2016-I

Instrucciones:

1. Hacer 7 de los 10 ejercicios, lo ejercicios marcados con $(*)$ son obligatorios.
2. La duración del examen será de 4 horas.

I)

(a) $(*)$ Demuestre que $\mathbb{R}P^n$ es orientable si y sólo si n es par.
(b) Demuestre que S^2 y $S^1 \times S^1$ tienen un atlas con dos cartas, sin embargo no son difeomorfos.

II)

(a) $(*)$ Sea M^k subvariedad de R^n, demuestre que $TM \cong \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid x \in M,\ v \in T_xM \subseteq \mathbb{R}^n\}$ (como haces vectoriales).
(b) Sea E haz vectorial orientable sobre X conexo y F subhaz de E. Demuestre que F es orientable si y sólo si E/F es orientable.

III) Considere $M(n, n, \mathbb{R})$, las matrices cuadradas de $n \times n$ con entradas reales, y $Sim(n, n, \mathbb{R})$, las matrices simétricas y $f : M(n, n, \mathbb{R}) \longrightarrow Sim(n, n, \mathbb{R})$ dada por $f(A) = A^tA$.

(a) $(*)$ Demuestre que $Df(A)(B) = A^tB + B^tA = A^tB + \left(A^tB\right)^t$ y que este es un epimorfismo si $A = A^t$.
(b) $(*)$ Concluya que $\{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A^tA = Id\}$ es una subvariedad compacta y calcule su dimensión.

IV)

(a) $(*)$ Sea $f : M \to \mathbb{R}^p$ diferenciable y N subvariedad de $\mathbb{R}^p$. Demuestre que si $\epsilon > 0$ existe $v_0 \in \mathbb{R}^p$ con $\|v_0\| < \epsilon$ tal que el mapeo $f_{v_0}(m) = f(m) + v_0$ es transversal a N.
(b) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t^2-1, t(t^2-1))$. Demuestre que f es una inmersión inyectiva pero no un encaje.

V)

(a) Sea $f(z) = z^{2k+1} + g(z)$ de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, g suave y $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z^{2k+1}} = 0$. Demuestre que existe R número real suficientemente grande tal que en $\{z \mid |z| = R\}$ f nunca es cero. Y además calcule en ese círculo $gra_2(f)$.
(b) Demuestre que si $f : S^1 \to S^1$ es suave, entonces f se extiende al disco cerrado unitario suavemente si y sólo si $gra(f) = 0$.

México D.F.; Facultad de Ciencias; UNAM