EXAMEN GENERAL DE CONOCIMIENTOS

Topología Diferencial

2015-I

Instrucciones: hacer, solamente, 5 ejercicios.
Los ejercicios marcados con (*) son obligatorios.

1. (*) a) Sea $f : M^n \to N^m$ diferenciable. Demuestre que $\Gamma_f = \{(m,n) | n = f(m)\}$ es una subvariedad de $M \times N$ y dé su dimensión.
b) Dé un encaje de $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ a $R^{n_1+\cdots+n_k+1}$

2. a) Sea $M(m,n,k)$ las matrices de $n \times m$ de rango k, demuestre que es un subvariedad de las matrices de $m \times n$ con coeficientes en los reales $M(m,n,R)$.
b) Demuestre que $\overline{M(m,n,k)} = \bigcup_{j=0}^{k} M(m,n,j)$.

3. Sean M y N variedades sin frontera y suponga que $M \times N$ es orientable. Demuestre que M y N son orientables.

4. a) Demuestre que si M^k es subvariedad de R^n, entonces $TM \simeq \{(x,v) | x \in M, v \in T_x(M)\}$ (como haces vectoriales).
b) Si $S^1 \subseteq R^2$ demuestre que el haz TS^1 es trivial.

5. (*) Sea A una matriz de $n \times n$ con entradas reales simétrica y no cero. Defina $f : R^n \to R$ como $f(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$ (pensando en $\bar{x}$ como vector columna). Sea $b \neq 0$, demuestre que $f^{-1}(b)$ es una $n-1$ subvariedad de R^n.
b) Sea $f : R^m \to R^n$ diferenciable y $2m \leq n$. Demuestre que dada $\epsilon > 0$ existe $\alpha \in L(R^m, R^n)$ con $\|\alpha\| < \epsilon$ y $f + \alpha$ es una inmersión.

6. (*) Usando teoría de grado módulo 2, demuestre que existe $z_0 \in C$ cero de $z^9 + \cos(|z|^2) f(z)$ con $f(z)$ holomorfa y $\lim \frac{f(z)}{z^9} = 0$.
b) Sea M la banda de Moëbius y Z su sección cero. Demuestre que $I_2(Z,Z) = I$.

7. a) Demuestre que existe $z_0 \in C$ cero de $z^9 + \cos(|z|^2) f(z)$ con $f(z)$ holomorfa y $\lim \frac{f(z)}{z^9} = 0$.
b) Sea $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m$ polinomio complejo. Sea r un número positivo y real con $r^m > |a_1| r^{m-1} + \cdots + |a_{m-1}| r + |a_m|$. Demuestre que $p(z)$ tiene al menos una raíz dentro de $\{z \in C \mid \|z\| < r\}$.