Examen General de Conocimientos

Topología Diferencial
2014-II

Instrucciones: hacer, solamente, 5 ejercicios. Los ejercicios marcados con $(*)$ son obligatorios.

1. $(*)$
   a) Sea $(M, \mathscr{A})$ variedad diferenciable con atlas $\mathscr{A}$. Demuestre que existe un único atlas $\mathscr{D}(\mathscr{A}) \supset \mathscr{A}$ de M tal que si $\mathscr{B}$ es un atlas y $\mathscr{B} \supset \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{D}(\mathscr{A}) \supset \mathscr{B}$.
   b) Dé un encaje de $S^{n_1} \times S^{n_2}$ a $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$ y demuestre que no existe inmersión de $S^{n_1} \times S^{n_2}$ a $\mathbb{R}^k$ con $k \leq n_1 + n_2$.

2. Sea (E, Π, X) un haz vectorial con X un espacio conexo y sea $f : E \to E$ un homomorfismo de haces con $f \circ f = f$. Demuestre que el rango de f (en cada fibra) es constante.

3. Sea M^k subvariedad de R^n, considere TM el haz tangente y $\perp M$ el haz normal, ambos sobre M. Demuestre que la suma de Whitney de ambos es trivial.

4. $(*)$ Sean M y N variedades conexas sin frontera. Demuestre que si $M \times N$ es orientable, entonces M y N son variedades orientables.

5. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pruebe que:
   a) $M = \{(x, y) \mid (x, y)A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = -1\}$ es una 1-subvariedad de $\mathbb{R}^2$.
   b) Calcule el espacio tangente de M en $(-1, 1)$.

6. a) Sea $\sum^k = \{A \in M(n, m, \mathbb{R}) \mid rang(A) = k\}$ demuestre que $\sum^k$ es una subvariedad de $M(n, m, \mathbb{R})$ de codimensión $(n-k)(m-k)$
   b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $2n \leq m$ y $\epsilon > 0$. Demuestre que existe $\alpha \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ con $\|\alpha\| < \epsilon$ y tal que $f + \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una inmersión.

7. $(*)$ Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f(z) = z^9 + g(z)$, donde g es una función diferenciable de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ y $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\|g(z)\|}{\|z^9\|} = 0$. Demuestre que en un disco cerrado de radio N suficientemente grande, f tiene un cero en su interior.

8. Consideremos $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función polinomial y $z_1, \ldots, z_k$ sus ceros en la bola abierta de radio 1, con multiplicidades $m_1, \ldots, m_k$ respectivamente. Si en S^1 no hay ceros, calcule $gra\left(\frac{f}{\|f\|}\right)$, con $\frac{f}{\|f\|} : S^1 \to S^1$.

México D.F. 2014; Facultad de Ciencias; UNAM
Dr. León Kusner