Examen General de Topología Diferencial

Semestre 2017-2
Jueves 22 de Junio de 2017
Salón S-102, Departamento de Matemáticas
Hora: 9 a.m. - 1 p.m.

Lee cuidadosamente todos los ejercicios antes de comenzar. Justifica detalladamente cada afirmación que uses. Resuelve cinco ejercicios, los indicados con $*$ son obligatorios. Todos los ejercicios tienen el mismo valor.

$*$ **Ejercicio 1:**

- Pruebe que $T\mathbb{S}^1$ es trivial.
- Sea M una n-variedad conexa. Pruebe que TM es trivial si y sólo si existen $\{X_i\}_{i=1}^n$ campos vectoriales linealmente independientes.

\- **Ejercicio 2:** Pruebe que $\mathbb{R}P^n$ es orientable si y sólo si n es impar.

$*$ **Ejercicio 3:**

- Dé un encaje de $\mathbb{S}^{n_1} \times \mathbb{S}^{n_2}$ a $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$.
- Considere $N = M(n, n, \mathbb{R})$, las matrices de $n \times n$ con coeficientes reales, y $Sim(n, n, \mathbb{R})$, las matrices simétricas. Considere el mapeo

$$\phi : N \to Sim(n, n, \mathbb{R}), \quad \phi(A) = AA^t.$$

  Demuestre que la matriz identidad es un valor regular de ϕ.

\- **Ejercicio 4:** Sean M, N, P variedades sin frontera. $F : M \times N \to P$ suave, Z subvariedad de P. Suponer que F es transversal a Z, defina, para cada $n \in N$, $f_n : M \to P$ como $f_n(m) = f(m, n)$. Demuestre que $\{n \in N : \ f_n \text{ es transversal a } Z\}$ es un conjunto denso en N.

\- **Ejercicio 5:** Sea M, una n-variedad suave y $N \subset M$ subvariedad de dimensión $n - m$, cerrado con la topología de M . Suponga que el haz normal de N en TM es trivial. Demuestre que existen $f : M \to \mathbb{S}^m$ suave y $y_0 \in \mathbb{S}^m$, valor regular de f, tal que $f^{-1}\{y_0\} = N$.

- **Ejercicio 6:**

  - Sea $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ la función altura, $h(x_1, ..., x_{n+1}) = x_{n+1}$. Demuestre que los polos son las únicas singularidades de h y que son de Morse.
  - Sea $N \subset \mathbb{R}^m$ subvariedad de dimensión m. Demuestre que existe $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal tal que la restricción de l a N es de Morse.

$\ast$ **Ejercicio 7:**

  - Sean M y N n-variedades, M compacta y $f : M \to N$ suave. Demuestre que si f no es suprayectiva, entonces $grado_2(f) = 0$. Dé un ejemplo donde el regreso es falso.
  - Demuestre que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0^2 = e^{-|z_0|^2}$.