Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica - 22 de junio de 2017

Nombre:____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7.

1. Considérese el espacio $X = \prod_{i=1}^{\infty} S_i^1$ con la topología del producto (usual) en Top, donde cada S_i^1 es una copia del círculo $\mathbb{S}^1$. Probar que X no tiene espacio cubriente universal.

2. Sea $p : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua, donde X es un espacio conectable por trayectorias. Considérense $x_0, x_1 \in X$ tales $p(x_0) = p(x_1) = y_0$.

   (a) Probar que $p_*(\pi_1(X, x_0))$ y $p_*(\pi_1(X, x_1))$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(Y, y_0)$

   (b) Supóngase que p es una aplicación cubriente. Probar que la familia de subgrupos de $\pi_1(Y, y_0)$ dada por $\{p_*(\pi_1(X, x) \mid x \in p^{-1}(y_0)\}$ es una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(Y, y_0)$.

3. Considérese la reflexión $r : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ dada por $r(x_0, x_1, ..., x_n) = (-x_0, x_1, ..., x_n)$. Probar que el homomorfismo $r_* : \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n; R) \longrightarrow \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n; R)$ es multiplicación por -1.

4. Sean X un espacio topológico y A, B subespacios tales que $X = A \cup B$. Se dice que el par (A, B) es escisivo si la inclusión $S_*(A) + S_*(B) \hookrightarrow S_*(X)$ induce un isomorfismo en homología con coeficientes en un anillo R. Probar que el par (A, B) es escisivo si y sólo si la inclusión

$$(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$$

es una escisión.

5. Supóngase que un espacio X es la unión ajena de subespacios abiertos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Probar que las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_\alpha H_q(X_\alpha; R) \longrightarrow H_q(X; R)\,, \quad q \geq 0\,.$$

¡Mucha suerte!