Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica – 30 de junio de 2016, 11h

Nombre :____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7.

1. Sea $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos basados y considere el producto $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, con punto básico $*$, dado por los puntos básicos $x_\alpha \in X_\alpha$. Probar que las proyecciones $p_\alpha \colon \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ definen un isomorfismo
$$\pi_n\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, *\right) \xrightarrow{\cong} \prod_{\alpha\in\Lambda} \pi_n\left(X_\alpha, x_\alpha\right).$$

2. Sea $p\colon E \to X$ una aplicación cubriente y considere un lazo $\omega\colon I \to X$ basado en $x_0 \in X$. Suponga que ω tiene un levantamiento $\widetilde{\omega}\colon I \to E$ tal que $\widetilde{\omega}(0) \neq \widetilde{\omega}(1)$, probar que $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ no puede ser elemento neutro del grupo.

3. Sea $f\colon I \to S^1$ una función continua y suprayectiva que solamente identifica en un mismo punto a 0 y 1. Probar que $[f] \in H_1(S^1; R)$ es un generador.

4. Sea X un espacio topológico y considere subespacios $A_1 \subset A \subset X$ y $B_1 \subset B \subset X$. Explique las condiciones que deben de satisfacer los complejos de cadenas para que exista la sucesión exacta de Mayer-Vietoris relativa y concluya que las condiciones se cumplen si los subespacios son abiertos.

5. Calcule la característica de Euler de los espacios proyectivos reales $\mathbb{R}P^n$.