Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica - enero de 2017

Nombre:____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7.

1. Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera de dimensión n.
   (a) Probar que $\pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1\,, \\ 0 & \text{si } n > 1\,. \end{cases}$
   (b) Probar que $\pi_q(\mathbb{S}^1) = 0 \quad \text{si} \quad q > 1\,.$

2. Sea G un grupo finito y X un espacio de Hausdorff. Supongamos que se tiene una acción continua libre $G \times X \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} X$. Probar que la aplicación cociente al espacio de órbitas $p : X \longrightarrow X/G$ es una aplicación cubriente.

3. Sea T el toro de dimensión 2. Probar que

$$H_q(T; R) \cong \begin{cases} R & \text{si } q = 0 \text{ ó } 2\,, \\ R \oplus R & \text{si } q = 1\,, \\ 0 & \text{si } q > 2\,. \end{cases}$$

4. Considerar la cuña de esferas $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$. Probar que

$$\widetilde{H}_q(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1; R) \cong \begin{cases} R & \text{si } q = 1\,, \\ R & \text{si } q = 2\,, \\ 0 & \text{si } q \neq 1, 2\,. \end{cases}$$

5. Sea $\mathbb{CP}^n$ el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja n. Probar que $\mathbb{CP}^n$ no es del mismo tipo de homotopía que el espacio proyectivo real de dimensión $2n$ $\mathbb{RP}^{2n}$.

¡Mucha suerte!