Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica - Febrero de 2015

Nombre:____

1. Considérese $\mathbb{S}^1$ como el círculo unitario en el plano complejo. ¿Cuántas clases de equivalencia de espacios cubrientes conexos hay sobre $\mathbb{S}^1$? Construir un representante para cada una de las clases. Justificar cada respuesta.

2. Sea $\mathbb{RP}^n$ el espacio proyectivo real de dimensión n $(n > 1)$. Probar

   (a) $\pi_1(\mathbb{S}^n) \cong \{e\}$ si $n > 1$.

   (b) $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

   (c) $\pi_q(\mathbb{S}^n) \cong \pi_q(\mathbb{RP}^n)$ si $q > 1$.

3. Un nudo K es la imagen de un encaje del círculo $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$. El grupo del nudo K se define como $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, *)$. Probar que la abelianización del grupo del nudo es isomorfa a $\mathbb{Z}$.

4. Calcular $H_q(\mathbb{RP}^2; R)$ para toda $q \geq 0$

5. Sea Y un espacio topológico tal que

$$\beta(Y) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \beta_q(Y)$$

   está definido, donde $\beta_q(Y)$ es el q-ésimo número de Betti de Y. Sea $Z = Y \cup_f \mathbb{D}^n$ el espacio que se obtiene de Y al adjuntarle una n bola mediante una aplicación $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow Y$. Probar que $\beta(Z) = \beta(Y) + (-1)^n$.

¡Mucha suerte!