Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica - junio de 2014

Nombre:____

1. Considérese el espacio $X = \prod_{i=1}^{\infty} S_i^1$, donde cada S_i^1 es una copia del círculo $\mathbb{S}^1$. Probar que X no tiene espacio cubriente universal.

2. Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente tal que E es localmente conectable por trayectorias y simplemente conexo. Sea $G(p)$ el grupo de transformaciones cubrientes de p y considérese la acción de $G(p)$ en E dada por la evaluación. Probar que el espacio de órbitas $E/G(p)$ es homeomorfo a X.

3. Sea X un espacio y $B \subseteq A \subseteq X$ subespacios tales que los grupos de homología con coeficientes en un campo K, $H_q(X, B; K)$, $H_q(X, A; K)$ y $H_q(A, B; K)$ son de dimensión finita para toda q. Probar la siguiente desigualdad:
$$\dim_K H_q(X, B; K) \leq \dim_K H_q(X, A; K) + \dim_K H_q(A, B; K)\,.$$

4. Sea $\Delta^1 = I = [0, 1]$ y $\omega : \Delta^1 \longrightarrow X$ un lazo en X. Definamos $\overline{\omega} : \Delta^1 \longrightarrow X$ como $\overline{\omega}(t) = \omega(1 - t)$. Probar que $[\overline{\omega}] = -[\omega] \in H_1(X; R)$.

5. Sea $f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ una aplicación continua y tómese el espacio de adjunción $Z = \mathbb{S}^{n-1} \cup_f \mathbb{B}^n$. Probar que si $n > 2$, entonces Z no es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{RP}^n$.

¡Mucha suerte!