Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica - enero de 2014

Nombre:____

1. Sea $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios punteados y considérese el producto topológico $\prod_\alpha X_\alpha$ con punto base $*$ dado por $*_\alpha = x_\alpha$. Probar que las proyecciones $p_\alpha : \prod_\alpha X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ inducen un isomorfismo
$$\pi_q(\prod_\alpha X_\alpha, *) \longrightarrow \prod_\alpha \pi_q(X_\alpha, x_\alpha)\,.$$

2. Sea $p : E \longrightarrow X$ una aplicación cubriente tal que E es conectable por trayectorias.
   (a) Probar que para cada $x \in X$ hay una acción transitiva del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ en la fibra $p^{-1}(x)$.
   (b) Sea $a \in p^{-1}(x)$. Calcular el grupo de isotropía $\pi_1(X, x)_a$ en el punto a.
   (c) Probar que hay una biyección $\pi_1(X, x)/\pi_1(X, x)_a \xrightarrow{\cong} p^{-1}(x)$.

3. Sea $\mathbb{CP}^n$ el espacio proyectivo complejo de dimensión n. Calcular el grupo de homología $H_q(\mathbb{CP}^n; R)$.

4. Sea X un espacio y $A, B \subseteq X$ subespacios tales que $X = A \cup B$. Probar que la triada $(X; A, B)$ es escisiva si sólo si la inclusión $j : (A, A\cap B) \hookrightarrow (X, B)$ induce isomorfismos en homología.

A la vuelta $\longrightarrow$

5. Sea M una variedad topológica, es decir, un espacio tal que cada punto $x \in M$ tiene una vecindad abierta U y un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V$, donde $V \subseteq H$ es un abierto en el semiespacio $H = \{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_n \geq 0\}$. La terna $(U, V; \varphi)$ se llama *carta.* Se define la *frontera* de M con

$$\partial M = \{x \in M \mid x \text{ tiene una carta } (U, V; \varphi)$$

$$\text{tal que } \varphi(x) = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 0)\}\,.$$

Probar que ∂M está bien definida, es decir, que si $x \in \partial M$, no puede tener una carta $(U', V'; \varphi')$ tal que $\varphi'(x) = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ tal que $t_n > 0$.

¡Mucha suerte!