EXAMEN: GENERAL FECHA: ?? DE ENERO DE 2015
PROFESORES: GERARDO ACOSTA
ROBERTO PICHARDO MENDOZA
MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL

NOMBRE COMPLETO:

Instrucciones

El examen consiste de 9 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 21. Para aprobar el examen se debe obtener al menos 15 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 10:00 A. M. a 3:00 P. M.).

Definiciones y notaciones

Dados dos conjuntos A y B, definimos $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Para un espacio topológico X y un subconjunto A de X, los símbolos $\overline{A}$ y $\operatorname{Int}_X A$ denotan la cerradura y el interior de A en X, respectivamente.

Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos será llamada *secuencialmente continua* si cada vez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Sea X un espacio topológico. Diremos que X es *completamente regular* si cada vez que F es un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus F$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ de tal modo que $f(x) = 0$ y $f(F) \subseteq \{1\}$. Por otro lado, X será llamado *localmente compacto* si para cada $x \in X$ y cualquier abierto U de X con $x \in U$ existe K, un subconjunto compacto de X, con $x \in \operatorname{Int}_X K \subseteq K \subseteq U$.

Cada vez que se hable de *el producto topológico* de una familia de espacios nos estaremos refiriendo al espacio topológico que resulta de equipar al producto cartesiano de los espacios con la topología producto.

Preguntas

1 (5 puntos). Determine cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos y cuáles son falsos. En cada caso, argumente su respuesta. *Nota*: cada inciso vale un punto.

1. Si A es un subconjunto arbitrario de X y F es un subconjunto cerrado de X, entonces $\operatorname{Int}_X(F \cup \operatorname{Int}_X A) = \operatorname{Int}_X(F \cup A)$.
2. Todo subespacio de un espacio separable es separable.
3. Todo subespacio de un espacio normal es normal.
4. Toda función continua es secuencialmente continua.
5. Toda función secuencialmente continua es continua.

2 (2.5 puntos). Suponga que $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de subconjuntos arbitrarios del espacio topológico X y haga lo siguiente.

1. Demuestre que
$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \cup \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m+n}} \right).$$
2. Muestre que, en general, la igualdad
$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$
no se satisface.
3. Suponga que $\mathscr{A}$ es una familia de subconjuntos de X de tal forma que para cada $x \in X$ existe U, un abierto de X, con $x \in U$ y de tal modo que el conjunto $\{A \in \mathscr{A} : U \cap A \neq \emptyset\}$ es finito. Pruebe que
$$\overline{\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}} = \bigcup\{\overline{A} : A \in \mathscr{A}\}.$$

.

3 (2 puntos). Suponga que X es un espacio T_2 y que $r : X \to X$ es una función continua tal que $r \circ r = r$. Demuestre que $r(X) = \{r(x) : x \in X\}$ es un subconjunto cerrado de X.

4 (2 puntos). Un espacio topológico será llamado *cero-dimensional* si posee una base consistente de subconjuntos que son, a la vez, abiertos y cerrados. Demuestre los enunciados siguientes.

1. El producto topológico de cualquier familia de espacios cero-dimensionales es un espacio cero-dimensional.
2. Todo subespacio de un espacio cero-dimensional es cero-dimensional.
3. Todo espacio cero-dimensional es completamente regular.
4. La línea de Sorgenfrey es cero-dimensional.

5 (2 puntos). Sea X un espacio metrizable, demuestre que si $A, B \subseteq X$ satisfacen

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset,$$

entonces existen abiertos U y V en X tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

6 (2 puntos). Sean A y B un par de subconjuntos conexos del espacio topológico X tales que $A \subseteq B$. Pruebe que si C es una componente conexa del subespacio $B \setminus A$, entonces el subespacio $B \setminus C$ es conexo.

7 (2 puntos). Suponga que $\{Y_i : i \in I\}$ es una familia no vacía de subespacios del espacio topológico X y demuestre que si $Y = \prod_{i \in I} Y_i$, entonces el subespacio $\bigcap_{i \in I} Y_i$ de X es homeomorfo al subespacio $\Delta = \{(y_i)_{i \in I} \in Y : \forall i, j \in I\ (y_i = y_j)\}$ de Y

8 (2 puntos). Para este ejercicio $\mathbb{R}$ denotará a la recta real equipada con la topología usual y $n \in \mathbb{N}$. Defina la relación binaria $\sim$ en $\mathbb{R}$ como sigue: $x \sim y$ si y sólo si $x - y$ es un número entero divisible por n. Dé por hecho que $\sim$ es de equivalencia y pruebe que el espacio cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo al subespacio del plano $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

9 (1.5 puntos). Suponga que X es un espacio localmente compacto y demuestre que si F es un subconjunto cerrado de X y U es un subconjunto abierto de X, entonces el subespacio $F \cap U$ es localmente compacto.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Valor	5	2.5	2	2	2	2	2	2	1.5	21
Tu puntaje										