Examen General de Topología Diferencial 2016-I

En todos los problemas la palabra diferenciable significa infinitamente diferenciable.
Se deben hacer 6 problemas. Los problemas marcados con asterisco son obligatorios.

*1 Demuestre que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es orientable si y sólo si n es impar.

2 Dé un encaje de $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \cdots \times S^{n_k}$ a $\mathbb{R}^{n_1+n_2+\cdots+n_k+1}$.

3 Sea $\overline{f} : \left(\mathbb{R}^n, \overline{0}\right) \to (\mathbb{R}, 0)$ germen diferenciable con $f\left(\overline{0}\right) = Df(0) = \cdots = D^{k-1}f(0) = 0$ y $D^k f(0) \neq 0$. Demuestre que

(a) Si k es impar, existe $\overline{h} : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ germen de difeomorfismo tal que $\overline{f} \circ \overline{h} = \overline{x^k}$.

(b) Si k es par, tenemos dos casos. Existen $\overline{h_1} : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ y $\overline{h_2} : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ gérmenes de difeomorfismos tales que

1. $\overline{f} \circ \overline{h_1} = \overline{x^k}$ si $D^k f(0) > 0$.
2. $\overline{f} \circ \overline{h_2} = -\overline{x^k}$ si $D^k f(0) < 0$.

4 Sea (E^n, π, X^k) un haz vectorial suave, $f : E \to E$ con $f \circ f = f$ (X conexa). Concluya que

(a) f tiene rango constante igual a r.

(b) Dada $V_{x_0} \in E$, existen cambios de coordenadas (isomorfismos de haces vectoriales de E), tales que localmente

$$f(x, v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n) = (x, v_1, \ldots, v_r, \overline{0})$$

*5 Demuestre que si M^n y N^m son variedades conexas sin frontera, entonces si $M^n \times N^m$ es orientable, así lo son M^n y N^m.

6 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, $n > 1$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $\epsilon > 0$. Demuestre que existe $g_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que Dg_ϵ nunca se anula y $\|f - g_\epsilon\|_K^1 < \epsilon$ (norma tanto en mapeos como en sus derivadas en K compacto.)

*7 Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un mapeo diferenciable con $2m \leq n$. Demuestre que si $\epsilon > 0$, existe $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineal de norma menor que ϵ tal que $f + \alpha$ es inmersión.

8 Sea $p(z) = z^{2n+1} + sen(|z|^2)q(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $q(z)$ polinomio de grado menor o igual a $2n$. Demuestre que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ con $p(z_0) = 0$.

9 Sea $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1}z + a_m$ con $a_j \in \mathbb{C}$ y que existe $r > 0$ tal que $r^m > |a_1|z^{m-1} + \cdots + |a_{m-1}|z + |a_m|$. Demuestre que $p(z)$ tiene un cero en $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

*10 Sea $p(z)$ polinomio de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ y que existe $r_0 > 0$ tal que $p(z)$ nunca es cero en $|z| = r_0$ y $grad\left(\frac{p(z)}{|p(z)|}\right) = l$ en $|z| = r_0$. Demuestre que existen en $B_{r_0}(\overline{0})$ ceros $z_1, \ldots, z_s$ de $p(z)$ con multiplicidad $k_1, \ldots, k_s$ respectivamente y $\sum_{j=1}^{s} k_j = l$.