Examen General para la Maestría en Matemáticas

Topología Algebraica - 21 de enero de 2016, 11h

Nombre:____

Cada problema vale 2 puntos. La calificación mínima para aprobar es 7.

1. Sea (X, x_0) un espacio punteado. Probar que si $q > 1$, entonces $\pi_q(X, x_0)$ es un grupo abeliano.

2. Sea $G \times X \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} X$ una acción propiamente discontinua (acción pareja).

   (a) Probar que la proyección del espacio de órbitas $p : X \longrightarrow X/G$ es una aplicación cubriente.

   (b) Sea $G(p)$ el grupo de transformaciones cubrientes de p y sea $h : G \longrightarrow G(p)$ la función dada por $h(g)(x) = g \cdot x$. Probar que h es un monomorfismo (homomorfismo inyectivo) y que si, además, X es conexo, entonces h es también un epimorfismo (suprayectivo).

3. Sea $\beta : \Delta^1 \longrightarrow \Delta^1$una aplicación continua tal que $\beta(e_0) = \beta(e_1)$, $\beta(e_1) = \beta(e_0)$. Sea $\sigma : \Delta^1 \longrightarrow X$ un 1-simplejo singular. Probar que la 1-cadena $\sigma + \sigma_\#(\beta)$ es una frontera y que por lo tanto $[\sigma + \sigma_\#(\beta)] = 0 \in H_1(X; R)$.

4. Considerar los subespacios $A \subset B \subset X$. Probar que la siguiente sucesión larga es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_q(A, B; R) \longrightarrow H_q(X, B; R) \longrightarrow H_q(X, A; R) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{q-1}(A, B; R) \longrightarrow \cdots$$

5. Sea X un complejo CW de dimensión n y con un número finito de celdas. Sea R un anillo noetheriano. Probar que $H_q(X; R)$ es finitamente generado para toda q y que $H_q(X; R) = 0$ para $q > n$. Recuérdese que si R es noetheriano, todo submódulo de un R-módulo finitamente generado es también finitamente generado.

¡Mucha suerte!