Examen General de Medios Continuos

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver los cuatro problemas. Cada problema vale 2.5 puntos. Entregar 4 de los 5 problemas, indique cuales.

1. Las ecuaciones de Newton para una partícula puntual de masa m en $\mathbf{R}^3$ es
$$m\ddot{q} = eE(q,t) + \frac{e}{c}(\dot{q} \times B(q,t)),$$
donde E, $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ son dados. El segundo término representa la *fuerza magnética de Lorentz*, con B el *campo magnético*. e y c son constantes.

   a) Checar que la ecuaciones arriba son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano
$$L = \frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 + e\phi + \langle \dot{q}, A\rangle,$$
donde el *potencial electrostático* $\phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, y *potencial vectorial* $A : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ son dadas, y además E, y B son
$$E = -\nabla\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \nabla \times A.$$

   b) Indique el momento canónico del sistema Lagrangiano anterior y escribe el Hamiltoniano en las coordenadas canónicas.

   c) Dé un ejemplo de un $A \neq 0$ que da campos magnéticos de la forma $B = [0, 0, B(x,y,z,t)]$ con $B(x,y,z,t)$ axisimétrico respecto al eje $\hat{z}$. Encuentre la cantidad conservada correspondiente (suponiendo $\phi \equiv 0$).

2. Sea el Hamiltoniano
$$H = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle + \frac{1}{2}\langle q, Kq\rangle,$$
donde K es una matriz $n \times n$ simétrica, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno Euclideano en $\mathbf{R}^n$. Se puede usar el hecho que existe matriz ortogonal A tal que $K = A\Lambda A^{-1}$, donde Λ es la matriz diagonal de los eigenvalores de K.

a) Dé condiciones para que $Q = M_1 q$, $P = M_2 p$ sea una transformada canónica.

b) Muestre que si los eigenvalores de K son estrictamente positivos, entonces el origen es linealmente estable. Cuáles son la frecuencias del sistema en términos de los eigenvalores de K?

c) Que sucede cuando los eigenvalores son no negativos ? De una condición sobre K que implique inestabilidad.

3. Sea un sistema de N partículas puntuales con masa m en la línea. La posición de la partícula j se da por las variable q_j, $j = 1, \ldots, N$, y el sistema se modela con el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j^2 - \sum_{j=1}^{N-1} V(q_{j+1} - q_j), \quad \text{con} \quad V(r) = \frac{A}{6r^6} - \frac{B}{3r^3},$$

y m, A, $B > 0$.

a) Muestre que las soluciones del sistema satisfacen $|q_{j+1}(t) - q_j(t)| > 0$, para cada t y j.

b) Sea r_* tal que $V'(r_*) = 0$. Escribe las ecuaciones de Euler-Lagrange y muestre que hay equilibrios con posiciones que satisfacen $q_{j+1} - q_j = r_*$, para cada $j = 1, \ldots, N$.

c) Escribe las ecuaciones de Hamilton y su linearización alrededor de los puntos fijos correspondientes. Es útil mostrar que la derivada (Jacobiana) $[D(J\nabla H)](z)$ del campo vectorial Hamiltoniano $J\nabla H$ en un punto fijo z_* es dada por

$$[D(J\nabla H)](z_*) = J\nabla^2 H(z_*),$$

donde $\nabla^2 H$ denota el Hessiano, i.e. $[\nabla^2 H]_{i,j} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}$. Muestre que V aparece en la linealización solo através de $V''(r_*)$

4. Muestre que en el problema de dos cuerpos (o problema de Kepler), la colisión de los dos cuerpos sólo puede suceder si el momento angular es cero.

5. Considere un disco homogéneo de radio R, ancho h y masa M, el cual está sujeto a la atracción de la gravedad y rueda sin resbalar sobre el eje x. Si agregamos una masa puntual al disco de masa m a una distancia $R/2$ del centro del disco, calcule su frecuencia de oscilación alrededor de su punto de equilibrio.