Examen General de Medios Continuos

Jueves 14 de enero de 2016

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver los cuatro problemas. Cada problema vale 2.5 puntos.

1. Considere un planeta esférico de densidad homogénea ρ y de radio R, esta esfera gira alrededor de su eje polar con una frecuencia ω. Supongamos que hacemos un agujero recto que parte de un punto del ecuador a otro punto del ecuador pasando por el centro de la esfera. Por este agujero dejamos caer una pequeña pelota (masa puntual) de masa m y que cae bajo la acción de la gravedad del planeta. Suponga que no existe fricción entre la pelota que cae con las paredes del agujero, y que el centro de masa del planeta no se mueve.

   (a) Determine cual es la frecuencia mínima de ω_0 para la cual la pelota nunca llega al centro del planeta.

   (b) Determine el tiempo que tarda la pelota en regresar al punto de salida donde la dejamos caer inicialmente.

   Nota: Para calcular la fuerza gravitacional del planeta a la masa m, se usan las siguientes observaciones (demostradas por Newton): (i) la fuerza gravitacional que ejerce una masa esférica de densidad constante, y radio R, masa M, y centro $\mathbf{r}$ hacia una masa puntual que esta a una distancia mayor que R del centro de la esfera, es la de una masa puntual con masa M, y ubicada en $\mathbf{r}$. Además (ii) la fuerza gravitacional de un cascarón esférico de densidad constante y radios interiores y exteriores R_1, R_2, a una masa puntual en el interior del cascarón es cero.

2. Una partícula puntual de masa m mueve en la superficie $z = x^2 + y^2$ de $\mathbf{R}^3$, bajo una fuerza gravitacional constante hacia abajo.

   (a) Escribir el Langangiano. Que constante corresponde a la simetría bajo rotaciones?

   (b) Encontrar los puntos fijos de las ecuaciones del movimiento.

(c) Es posible tener movimientos con $z(t) = \text{constante} \neq 0$, $\forall t$? En tal caso describa estas soluciones.

3. Sea un sistema de N partículas puntuales con masa m en la linea. La posición de la partícula j se da por las variable q_j, $j = 1, \dots, N$, y el sistema se modela con el Langrangiano

$$L = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{N} \dot{q}_j^2 + \frac{k_2}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(q_{j+1} - q_j)^2 + \frac{k_3}{3}\sum_{j=1}^{N-1}(q_{j+1} - q_j)^3,$$

con m, $k_2 > 0$, k_3 real.

(a) Checar que $q = 0$, $\dot{q} = 0$, es un punto fijo de las ecuaciones de movimiento, y que el sistema linearizado alrededor de este punto se describe por las ecuaciones obtenidas por la parte cuadrática de L, i.e L con $k_3 = 0$.

(b) Escribe la parte cuadrática de L en la forma

$$L = \frac{1}{2}m\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle + \frac{1}{2}k_2\langle q, Kq \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno Euclideano en $\mathbf{R}^N$, y K es una matriz simétrica tridiagonal. Encontrar la matriz K.

(c) Relacione las frecuencias del sistema con los eigenvalores de la matriz K. (Ser puede también usar el cambio de variables $q = MQ$, M la matriz de eigenvectores de K, para diagonalizar el sistema linearizado.) Muestre que la matriz K tiene un eigenvalor $\lambda_1 = 0$, y que sus demás eigenvalores son positivos.

(d) Muestre que para $k_3 \neq 0$ el sistema puede tener mas equilibrios. Encuentre por ejemplo un equilibrio de la forma $q = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1]$, i.e. configuración con un salto en un punto interior. Que combinación de k_2, k_3 nos permite tener un equilibrio de esta forma?

4. Dos barras de longitud L y radio r, con $r << L$ y densidad ρ están unidas por una bisagra en uno de sus extremos. Si la posición inicial de estas barras es en forma de escuadra a una altura $A < L$ del suelo, determine el tiempo que tardan en caer al suelo estas barras por acción de la gravedad (ver figura). Suponga que los extremos de las barras que están en contacto con el suelo no tienen fricción al desplazarse por el suelo.