EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2017-I
ENERO DEL 2016

Duración: 6 horas
Instrucciones:
(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
(4) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea Ω un conjunto no vacio y sea $\{B_i\}_{i=1}^N$ una **partición** de Ω con N un entero positivo. Sea $\mathscr{F}$ el mínimo σ-álgebra que contiene a $\{B_i\}_{i=1}^N$. Suponga que $\{p_i\}_{i=1}^N$ son números positivos, tal que, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, y defina $P(B_i) = p_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

(1) Pruebe que $\mathscr{F}$ es la familia de uniones finitas de B_i's.
(2) Usando 1), vea que si $A \in \mathscr{F}$ entonces $P(A) = \sum_{\{i \in \{1,\ldots,n\} | B_i \subset A\}} p_i$, y que por lo tanto $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un espacio de probabilidad.
(3) Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Demuestre que

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i 1_{B_i}(\omega) \quad \text{para cada } \omega \in \Omega,$$

donde $\{a_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}$.

Problema 2. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ el espacio de probabilidad del Problema 1. Sea $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de variables aleatorias en $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, y sea X otra variable aleatoria en el mismo espacio. ¿ Bajo que condiciones sobre $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, se tiene que X_n converge a X casi seguramente $[P]$? (Sugerencia: use el inciso iii) del Ejercicio 1).

Problema 3. Una variable aleatoria X se dice infinitamente divisible si para cada n existen variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $X_1^n, \ldots, X_n^n$ tales que $X_1^n + \cdots + X_n^n$ tiene la misma distribución que X. Pruebe que las variables aleatorias Γ son infinitamente divisibles.

Problema 4. Sean $(X_i, i \geq 1)$ variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro p. Defina N_k el índice en el que por primera vez hay k unos seguidos y defina $m_k = \mathbb{E}(N_k)$. Diga cómo se distribuye N_1 y calcule su esperanza. Calcule $\mathbb{E}(N_k \mid N_{k-1})$ y tome esperanzas para deducir que

$$m_k = \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^k}.$$

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Inicialmente, una urna contiene una bola blanca y una bola negra. El siguiente experimiento aleatorio se realiza indefinidamente: se escoge al azar una bola de la urna y se devuelve con otra bola del mismo color. Dé un modelo matemático preciso para la evolución de la proporción de bolas blancas en la urna y pruebe que, respecto de una filtración conveniente que definirán, dicha proporción es una martingala convergente casi seguramente y en L_p para toda $p \in [1, \infty]$.

Problema 6. Sean N un proceso de Poisson de intensidad λ y $S = (S_n, n \geq 0)$ la sucesión de sumas parciales de la sucesión iid $\xi = (\xi_i, i \geq 1)$. Asuma que N y ξ son independientes y defina $X_t = S_{N_t}$. Calcle $\mathbb{E}\big(e^{iuX_t}\big)$ en términos de $\mathbb{E}\big(e^{iu\xi_1}\big)$.

Problema 7. Supongamos que tenemos K líneas telefónicas, llamadas telefónicas que llegan como un proceso Poisson de tasa λ, y la duración de cada llamada tiene distribucón $Exponencial(\mu)$, donde tales duraciones son independientes entre sí y de los tiempos en que ocurren las llamadas telefónicas. Las llamadas que llegan cuando todas las líneas están ocupadas se pierden. Sea $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ y $E_K(\rho)$ la proporción de llamadas que se pierden en régimen estacionario.

(1) Considere un sistema similar donde, en lugar de K, tenemos una infinidad de líneas telefónicas. Pruebe que su distribución estacionaria π^∞ está dada por la distribución $Poisson(\rho)$.

(2) Dé un argumento razonable para afirmar que la distribución estacionaria del sistema con K líneas, denotada por π^K, puede ser obtenido como la distribución estacionaria del sistema con una infinidad de líneas condicionado a tomar valores en $\{0, 1, ..., K\}$.

(3) Utilice los incisos anteriores para concluir que

$$E_K(\rho) = \frac{\frac{\rho^K}{K!}}{1 + \rho + ... + \frac{\rho^K}{K!}}.$$

Problema 8.

(1) Dé la definición de proceso gaussiano y de movimiento browniano (como proceso gaussiano).

(2) Sea B un movimiento browniano y defina $X_t = e^{-t/2} B_{e^t}$. Pruebe que X es un proceso gaussiano y determine sus funciones de media y autocorrelación.