

Universidad Nacional Autónoma de México
Examen General de Teoría de Matroides

Resuelva los siguientes 5 problemas

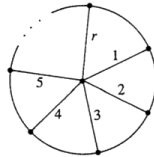
Tiempo: 4 horas

1. Sean T_8 y R_8 los vectores matroidales de las siguientes matrices sobre $GF(3)$:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

- (i) Muestra que T_8 y R_8 son autoduales.
- (ii) Muestra que R_8 es idénticamente autodual, pero T_8 no.
- (iii) Da representaciones geométricas para R_8 y T_8 .
- (iv) Muestra que si $M \in \{T_8, R_8\}$ y $X = E(M) - \{8\}$, entonces $(M|X)^* \cong F_7^-$.
- (v) Muestra que R_8 puede obtenerse de $AG(3, 2)$ al relajar dos circuitos-hiperplanos disjuntos.

2. Sea r un entero mayor que 1 y \mathcal{W}_r la gráfica que aparece a continuación:



Muestra que:

- (i) $\mathcal{W}_3 \cong K_4$.
- (ii) $\mathcal{W}_r^* \cong \mathcal{W}_r$.
- (iii) $M(\mathcal{W}_4)$ es isomorfo a la restricción de $M^*(K_{3,3})$.
- (iv) Muestra que si $r \geq 3$ entonces $M(\mathcal{W}_r)$ tiene como menor a $M(K_4)$.

3. Prueba que una retícula (latiz) finita \mathcal{L} es semimodular si para toda x, y en \mathcal{L} , la siguiente condición se satisface:

- (†) Si x y y cubren ambos a $x \wedge y$, entonces $x \vee y$ cubre a x y a y .

4. Una gráfica H es el dual de Whitney de una gráfica G si existe una biyección $\psi : E(G) \rightarrow E(H)$ tal que, para cada subconjunto $Y \subseteq E(G)$,

$$r(M(H)) - r(M(H) \setminus \psi(Y)) = |Y| - r(M(G)|Y).$$

(i) Muestra que si H es el dual de Whitney de G , entonces G es el dual de Whitney de H .

(ii) Determina la relación entre los duales de Whitney y los duales geométricos y abstractos.

(iii) Pruebe que una gráfica es plana si y sólo si tiene un dual de Whitney.

5. Si X es un conjunto de tres elementos de un matroide M , muestra que M tiene como menor a $U_{2,4}$ y cuyo conjunto base contiene a X si y sólo si M tiene un circuito y un cocircuito cuya intersección es X .