

Examen General. Teoria de Gráficas

Duración: 4 horas. Resolver 6 ejercicios de los siguientes 9 (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificará sobre los 6 ejercicios de menor puntaje).

- 1.- *Sea G una gráfica simple de diámetro mayor que 3.*
 - a) *Muestra que el complemento de G tiene diámetro menor que 3.*
 - b) *Deduce que toda gráfica auto-complementaria tiene diámetro a lo más 3.*
- 2.- *Muestra que una sucesión de enteros positivos (d_1, \dots, d_n) es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.*
- 3.- *Muestra que cualquier par de ciclos de longitud máxima en una gráfica simple conexa sin vértices de corte tienen al menos dos vértices en común.*
- 4.- *Sea G una digráfica fuertemente conexa. Muestra que:*
 - a) *G tiene al menos $m - n + 1$ ciclos dirigidos.*
 - b) *G contiene un árbol generador tal que cada uno de sus ciclos fundamentales es un ciclo dirigido si y sólo si G tiene exactamente $m - n + 1$ ciclos dirigidos.*
- 5.- *Muestra que una gráfica 3-conexa no bipartita contiene al menos 4 ciclos impares.*
- 6.- *Muestra que una gráfica simple $G = (V, E)$ de orden n tal que $\sum_{x \in V} \binom{d_G(x)}{2} > \binom{n}{2}$ contiene un ciclo de orden 4 como subgráfica.*
- 7.- *Sea D una digráfica cuyo número cromático es al menos $kl + 1$ (k y l enteros positivos), y sea f una función de los vértices de D en los reales. Muestra que si D no contiene una trayectoria dirigida (u_0, u_1, \dots, u_k) tal que $f(u_0) \leq f(u_1) \leq \dots \leq f(u_k)$, entonces D contiene una trayectoria dirigida (v_0, v_1, \dots, v_l) tal que $f(v_0) > f(v_1) > \dots > f(v_l)$.*
- 8.- *Sea M un apareamiento maximal en una gráfica G (que no esta contenido propiamente en ningún otro apareamiento de G), y sea M^* un apareamiento máximo de G . Muestra que $|M| \geq \frac{1}{2}|M^*|$.*
- 9.- *Muestra que el número cromático por aristas de una gráfica cúbica con una arista de corte es mayor a 3.*